ММО-14

1. Гүдгэр 6 өнцөгтийн дотоод өнцгүүд тэнцүү бол

$$S \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6)$$

болохыг батал. Энд S нь зургаан өнцөгтийн талбай; $a_1, \ldots, a_6$ дараалсан талууд болно.

2. $P_1, \ldots, P_k$ нь $m+n$-ийг хуваадаг ялгаатай анхны тоонууд бөгөөд эдгээрээс яг S ширхэг нь n-ийг хуваадаг бол дараах тэнцэтгэлийг батал.

$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_j\}} \left(\left[\frac{m+n}{P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_j}} \right] - \left[\frac{m}{P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_j}} \right] - \left[\frac{n}{P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_j}} \right] \right) = 2^k - 2^s$$

Энд $\{i_1, \ldots, i_j\}$ гэсэн $\{1, \ldots, k\}$-ийн бүх хоосон биш дэд олонлогоор нийлбэрчилнэ.

3. Нийлбэр нь 832 байх ба квадратууд нь геометр прогресс үүсгэх бүх натурал тоон гурвалыг ол.

4. Бодит тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон бөгөөд дурын бодит тоо a, b-ийн хувьд

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a) \cdot f(b)}$$

нөхцөлийг хангах бүх тэгш функц $f(x)$-үүдийг ол.

5. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ нь хос хосоороо ялгаатай бөгөөд $0 \leq \alpha_i \leq \pi$, $i = 1, \ldots, n$ байх өнцгүүд, n сондгой натурал тоо бол

$$(\sin\alpha_1 + \cdots + \sin\alpha_n)^2 + (\cos\alpha_1 + \cdots + \cos\alpha_2)^2 \geq 1$$

тэнцэтгэл бишийг батал.

6. Зөв гурвалжин дотор дурын O цэг авчээ. Энэ цэгээс оройнууд хүртэлх зайнуудын нийлбэр, энэ цэгээс талууд хүртэлх зайнуудын нийлбэрийг 2 дахин авснаас багагүй гэдгийг батал. Хэдийд тэнцэл биелэх вэ?