

IMO shortlist 2009

1. Дараах өгүүлбэр ямагт үнэн байх боломжит хамгийн их k бүхэл тоог ол:

Дураар 2009 ширхэг үл бөхөх гурвалжин сонгон авъя. Гурвалжин бүрийн нэг тал хөх, нэг тал улаан, нэг тал цагаан байхаар гурван талыг нь будъя. Тэгвэл бид

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2009} \text{ хөх талуудын урт,}$$

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{2009} \text{ улаан талуудын урт,}$$

$$w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{2009} \text{ цагаан талуудын урт}$$

гэсэн тоонуудтай болно. Эдгээрээс b_j, r_j, w_j тоонууд үл бөхөх гурвалжны талууд болох j индекс дор хаяж k ширхэг олдоно.

2. a, b, c эерэг бодит тоонууд $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$ нөхцөлийг хангана.

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

3. Натурал тоон олонлогийг натурал тоонуудын олонлогт буулгасан аливаа x, y натурал тоонуудын хувьд

$$x, \quad f(y), \quad f(y + f(x) - 1)$$

тоонууд үл бөхөх гурвалжны талууд болдог бүх f функцийг ол.

4. a, b, c эерэг бодит тоонууд $ab + bc + ca \leq 3abc$ нөхцөлийг хангадаг байг.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + 3 \leq \sqrt{2}(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})$$

болохыг батал.

5. f функц бодит тоон олонлогийг бодит тоон олонлог буулгадаг байг.

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x$$

нөхцөлийг хангах x, y бодит тоонууд олдохыг батал.

6. Натурал тоонуудын эрс өсөх дараалал $s_1, s_2, s_3, \dots$ өгөгдсөн ба

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \text{ ба } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

дэд дарааллууд нь арифметик прогресс үүсгэдэг байг. $s_1, s_2, s_3, \dots$ дараалал мөн арифметик прогресс гэж батал.

7. Аливаа x, y бодит тоонуудын хувьд

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

8. Тус бүрдээ нэг тал нь хар өнгөтэй, нөгөө тал нь алтлаг өнгөтэй 2009 ширхэг хөзөр урт ширээн дээр параллел байрласан байв. Эхлээд бүх хөзрийн алтлаг талаараа харсан байв. Хоёр хүн ээлжээр үйлдэл хийж тоглоно. Аливаа үйлдэл нь хамгийн зүүн талын хөзөр нь алтлаг талаараа байх дараалсан 50 ширхэг хөзрийг эргүүлнэ. Ингэхэд алтлаг талаараа харсан хөзөр хар талаараа харах бөгөөд нөгөөх нь мөн адил солигдоно. Хамгийн сүүлд үйлдэл хийсэн тоглогч хожино.

(a) Тоглоом үргэлж дуусах албатай юу?

(b) Эхний тоглогч хожлын стратегитай юу?

9. $n \geq 2$ бүхэл тоо. Сөрөг биш бүхэл тоонуудын

$$1. a_i + b_i + c_i = n, i = 1, \dots, N(n)$$

$$2. \text{Хэрэв } i \neq j \text{ бол } a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$$

чанартай хамгийн олон $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, N(n)$ гуравтын тоог $N(n)$ гэж тэмдэглэе. $n \geq 2$ үед $N(n)$ тоог ол.

10. n натурал тоо. Мөн $\varepsilon_i = 0$ эсвэл $\varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n-1$ байх $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ дараалал өгөгдөв. $a_0, \dots, a_n$ ба $b_0, \dots, b_n$ дарааллууд дараах дүрмээр тодорхойлогдов:

$$a_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = b_1 = 7$$

$$a_{i+1} = \begin{cases} 2a_{i-1} + 3a_i, & \text{хэрэв } \varepsilon_i = 0, \\ 3a_{i-1} + a_i, & \text{хэрэв } \varepsilon_i = 1. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$b_{i+1} = \begin{cases} 2b_{i-1} + 3b_i, & \text{хэрэв } \varepsilon_{n-i} = 0, \\ 3b_{i-1} + b_i, & \text{хэрэв } \varepsilon_{n-i} = 1. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1$$

$a_n = b_n$ болохыг батал.

11. $m \geq 1$ бүхэл тоо ба $2^m \times 2^m$ шатрын хөлгийг аль нэг диагоналийн дагуух нүднүүд нь нэгж талтай тэгш өнцөгт үүсгэж байхаар тэгш өнцөгтүүдэд хуваажээ. Эдгээр тэгш өнцөгтүүдийн периметрийн нийлбэр хамгийн багадаа хэдтэй тэнцэх вэ?

12. Зөв таван өнцөгтийн орой бүрд 2 литрийн хоосон хувин байрлуулсан байв. Үнсгэлжин ба түүний хорон санаат хойт эх дараах үйлдлийг тойрог бүрд ээлжлэн хийнэ: Эхлээд хойт эх нь голоос нэг литр ус авч ирж хувингуудад өөрийн дураар хувааж хийнэ. Үүний дараа Үнсгэлжин аль нэг хөрш хоёр хувинг сонгоод усыг нь голд асгаад хувингуудыг буцааж тавина. Үүний дараа дараагийн тойрог эхэлнэ. Хойт эхийн зорилго нь аль нэг хувинг дүүргэж ус халиах, Харин Үнсгэлжингийн зорилго нь үүнийг тасалдуулах юм. Хорон санаат хойт эх аль нэг хувинг халиаж чадах уу?

13. 999×999 шатрын хөлөг дээр залхуу тэрэг дараах байдлаар нүүнэ: өөрийн байгаа нүдний хөрш буюу ерөнхий талтай нүд рүү нүүх ба нүүдэл бүр нь эргэлт байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл дараалсан хоёр нүүдэл нь перпендикуляр байна. Өөрийгөө огтолдоггүй зам нь залхуу тэрэгний нүүдлээр үүсэх ялгаатай оройнуудын дараалал юм. Хэрвээ замын сүүлийн нүднээс эхний нүд рүү залхуу тэрэг нүүж чадах бол уг

замыг цикл гэе. Залхуу тэрэгний явж чадах хамгийн урт цикл хэдэн нүднээс тогтох вэ?

14. Хувилбар 1. Бодит тоон шулуун дээр дэвхрэг үсэрдэг. Тэрээр 0 цэг дээрээс эхлэн баруун тийш өөрийн дураар $1, 2, \dots, 2009$ урттай нийт 2009 удаа үсэрнэ. M нь $1005 \cdot 2009$ -өөс бага 2008 ширхэг натурал тооноос тогтох тоон олонлог байв. Тэгвэл дэвхрэг M олонлогийн нэг ч цэг дээр буухгүй байхаар үсрэлтүүдээ хуваарилж чадна гэж батал.

Хувилбар 2. n сөрөг биш бүхэл тоо байг. Дэвхрэг бодит тоон шулуун дээр үсэрдэг. Тэрээр 0 цэг дээрээс эхлэн баруун тийш өөрийн дураар $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ урттай нийт $n+1$ удаа үсэрнэ. M нь $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}$ -ээс бага n ширхэг натурал тооноос тогтох тоон олонлог байв. Тэгвэл дэвхрэг M олонлогийн нэг ч цэг дээр буухгүй байхаар үсрэлтүүдээ хуваарилж чадна гэж батал.

15. $n \geq 2$ бүхэл тооны хувьд түүний өндөр $h(n)$ -ийг аравтын бичлэгийн цифрүүдийнх нь тусламжтайгаар дараах байдлаар тооцоолъё. r нь n тооны аравтын бичлэгийн сүүлийн цифр байг:

1. Хэрэв $r = 0$ бол $h(n)$ нь n тооны хамгийн сүүлийн 0 цифрийг арилгахад гарах тоотой ижил байна.
2. Хэрэв $1 \leq r \leq 9$ бол n тоог зөвхөн r -ээс багагүй цифрүүдээс тогтох максимал R хэсэг ба хоосон байх болох сүүлийн цифр нь r -ээс эрс бага байдаг L хэсэгт хуваана. Үүний дараа $h(n)$ тооны аравтын бичлэг нь нэг ширхэг L тоо ба хоёр ширхэг $R-1$ тоог залгаж бичихэд гарах тоо болно. Жишээ нь $n = 17, 151, 345, 543$ тооны хувьд $L = 17, 151, R = 345, 543$ тул $h(n) = 17, 151, 345, 542, 345, 542$ болно.

Ямар ч $n \geq 2$ тооноос эхлэн h үйлдлийг төгсгөлөг удаа хийн 1-ийг гаргаж авч чадна гэж батал.

16. ABC гурвалжны $AB = AC$ байг. A ба B өнцгийн биссектрисүүд BC ба AC талуудтай харгалзан D ба E цэгт огтлолцоно. ADC гурвалжинд багтсан тойргийн төв K гэе. $\angle BEK = 45^\circ$ гэж үзье. $\angle BAC$ -ийн боломжит бүх утгыг ол.

17. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O байг. P ба Q цэгүүд харгалзан CA ба AB талуудын дотоод цэгүүд. k тойрог BP, CQ, PQ хэрчмүүдийн дундаж цэгийг дайрдаг. Хэрвээ PQ шулуун k тойргийг шүргэдэг бол $OP = OQ$ байна гэж батал.

18. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB, AC талуудыг харгалзан Z, Y цэгүүдэд шүргэдэг. BY ба CZ шулуунуудын огтлолцлын цэгийг G гэе. R, S цэгүүдийг $BCYR, BCSZ$ дөрвөн өнцөгтүүд параллелограм байхаар авав. $GR = GS$ болохыг батал.

19. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. AC, BD диагоналиудын огтлолцлын цэг E ; AD, BC шулуунуудын огтлолцлын цэг F байг. AB, CD хэрчмийн дундаж цэгүүд харгалзан G, H гэе. EF нь E, G, H цэгүүдийг дайрсан тойрогийг E цэгт шүргэнэ гэж батал.

20. O цэгийн хувьд тэгш хэмтэй P олон өнцөгт өгөгдөв. Ямар нэг $P \subset R$ байх параллелограммын хувьд

$$\frac{|R|}{|P|} \leq \sqrt{2}$$

болохыг батал. Энд R, P олон өнцөгтүүдийн талбайг харгалзан $|R|, |P|$ гэж тэмдэглэв.

21. $ABCD$ (AB, CD -тэй парааллел биш) гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AD, BC талуудын үргэлжлэл P цэгт огтлолцоно. ABP, DCP гурвалжнуудын багтаасан тойргийн төвүүд харгалзан O_1, O_2 ; өндрүүдийн огтлолцлын цэгүүд харгалзан H_1, H_2 байг. O_1H_1, O_2H_2 хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг харгалзан E_1, E_2 гэж тэмдэглэе. E_1 цэгээс CD -д татсан перпендикуляр, E_2 цэгээс AB -д татсан перпендикуляр, H_1H_2 шулуун гурав нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

22. ABC гурвалжны багтсан тойргийн төв I ба BIC, CIA, AIB гурвалжнуудын багтсан тойргийн төв харгалзан X, Y, Z гээ. XYZ гурвалжин зөв гурвалжин байг. Тэгвэл ABC ч мөн адил зөв гурвалжин гэж батал.

23. $ABCD$ тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгт байг. A цэгийг дайрсан g шулуун BC хэрчмийг M цэгт, CD шулуун N цэгт тус тус огтолдог, $\triangle ABM, \triangle MNC, \triangle NDA$ -ийн багтсан тойргийн төвүүд харгалзан I_1, I_2, I_3 гээ. $\triangle I_1I_2I_3$ -ийн өндрүүдийн огтлолцлын цэг g шулуун дээр оршино гэж батал.

24. Клуб n гишүүнтэй. Тэдгээр нь $1, 2, \dots, n$ гэсэн гишүүнчлэлийн дугаартай байв. Клубын гишүүд бусад гишүүд рүүгээ бэлэг илгээдэг бөгөөд өөрт ирсэн бэлгээ бусад руугаа илгээж болно. Өөрийн илгээсэн бэлгээ буцааж авах байдал гаргахгүй байхын тулд клубын зүгээс дараах журмыг хэлэлцэж баталжээ:

“ a гишүүнт b гишүүнд зөвхөн $a(b-1)$ тоо n -д хуваагдаж байх үед л бэлэг илгээж болно.”

Хэрвээ дээрх дүрмийг баримталвал бүлгийн аль ч гишүүн өөрийн илгээсэн бэлгийг буцааж авахгүй гэдгийг батал.

25. Хэрвээ $N = 1$ эсвэл N тоо тэгш ширхэг анхны тооны үржвэр болдог бол N натурал тоог *тэнцвэртэй* тоо гээ. Өгөгдсөн a, b натурал тоонуудын хувьд $P(x) = (x+a)(x+b)$ байх P олон гишүүнт тодорхойлж.

(a) $P(1), P(2), \dots, P(50)$ тоонууд бүгдээрээ тэнцвэртэй байх ялгаатай a, b натурал тоонууд олдоно гэж батал.

(b) $P(n)$ тоо бүх натурал n тооны хувьд тэнцвэртэй бол $a = b$ болохыг батал.

26. Тогтмол биш $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц өгөгдөв. Аливаа a, b натурал тоонуудын хувьд $a-b \mid f(a)-f(b)$ нөхцөл биелдэг байг. Тэгвэл ямар нэг c натурал тооны хувьд $p \mid f(c)$ байх p анхны тоо төгсгөлгүй олон гэж батал.

27. Аливаа $2 \leq k \leq n-1$ байх k тооны хувьд

$$a_{n+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1$$

нөхцөлийг хангах натурал тоонуудын $a_1, a_2, \dots, a_n$ дараалал оршин байх бүх n тоог ол.

28. Бүхэл коэффициенттэй, тогтмолоос ялгаатай $P(x)$ олон гишүүнт өгөгдөв. Аливаа натурал n тоо бүрийн хувьд $T^n(x) = x$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдийн тоо $P(n)$ -тэй тэнцүү байх $T: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ функц оршин байхгүй гэж батал. Энд T^n -ээр T функцийг n дахин хэрэглэсэн функцийг тэмдэглэв.

29. k натурал тоо байг. Аливаа $n \geq 1$ тоо бүрийн хувьд

$$a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n}$$

байдаг бүхэл тоонуудын $a_0, a_1, \dots$ дараалал оршин байдаг бол $k-2$ тоо 3-д хуваагдана гэж батал.

30. a, b нь нэгээс их ялгаатай натурал тоонууд байг. $(a^n - 1)(b^n - 1)$ нь бүтэн квадрат биш байх n натурал тоо оршин байна гэж батал.