

IMO shortlist 2008

1. $pq = rs$ байх аливаа $p, q, r, s > 0$ тоонуудын хувьд

$$\frac{f(p)^2 + f(q)^2}{f(r^2) + f(s^2)} = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}$$

байх бүх $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ функцийг ол.

2. (a) $xyz = 1$ байх аливаа $x, y, z \neq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(b) Дээрх тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрдэг байх рационал тоонуудын x, y, z гуравт төгсгөлгүй олон олдоно гэдгийг харуул.

3. $S \subseteq \mathbb{R}$ байг. Хэрвээ S олонлогийг S -д буулгадаг (f, g) функцүүдийн хос дараах чанартай бол түүнийг *Испани хос* гэж нэрлэе:

(i) Хоёр функц хоёулаа өсдөг функц. Өөрөөр хэлбэл аливаа $x < y$, $x, y \in S$ тоонууды хувьд $f(x) < f(y)$ ба $g(x) < g(y)$ биелнэ.

(ii) Аливаа $x \in S$ тооны хувьд $f(g(g(x))) < g(f(x))$ байна.

Дараах тохиолдлуудад Испани хос оршин байх эсэхийг тодорхойл.

(a) $S = \mathbb{N}$ буюу натурал тоон олонлог байх.

(b) $S = \{a - 1/b : a, b \in \mathbb{N}\}$ олонлогийн хувьд

4. Бүхэл тоо m бүрийн хувьд $t(m)$ -ээр $\{1, 2, 3\}$ олонлогийн $m+t(m)$ тоо 3-д хуваагддаг байх тоог тэмдэглэе. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ функц $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ ба

$$f(2^n + m) = f(2^n - t(m)) - f(m), \text{ аливаа } m, n \geq 0 \text{ ба } 2^n > m$$

нөхцөлийг хангадаг бол аливаа $p \geq 0$ бүхэл тооны хувьд $f(3p) \geq 0$ болохыг батал.

5. a, b, c, d эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$abcd = 1 \text{ ба } a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

нөхцөл биелэнэ.

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$$

болохыг батал.

6. Аливаа $x, y \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ функц

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right)$$

нөхцөлийг хангана. f -ийн утга болдоггүй натурал тоо оршин байна гэж батал.

7. Аливаа a, b, c, d эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c} + \frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d} + \frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a} + \frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} \geq 0$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг ол.

8. Хавтгайд талууд нь координатын тэнхлэгүүдтэй параллел бөгөөд эерэг урттай тэгш өнцөгтүүд авч үзье. Ийм тэгш өнцөгтүүдийг *хайрцаг* гэж нэрлэе. Хоёр хайрцаг дотоод ерөнхий цэгтэй эсвэл хүрээ нь ерөнхий цэгтэй бол тэдгээрийг *огтлолцдог* гэе.

B_i, B_j хайрцагууд огтлолцох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $i \not\equiv j \pm 1 \pmod{n}$ байдаг $B_1, B_2, \dots, B_n$ хайрцагууд олддог байх хамгийн их n тоог ол.

9. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн элементүүдийн

Аливаа $k = 1, 2, \dots, n$ бүрийн хувьд $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ нь k -д хуваагддаг

чанартай $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ сэлгэмлийн тоог ол.

10. Координатын хавтгайн бүх бүхэл координаттай цэгүүдийн S олонлог авч үзье. k натурал тооны хувьд ABC гурвалжны талбай k -тай тэнцүү байхаар $C \in S$ цэг олддог бол $A, B \in S$ цэгүүдийг *k-найзууд* гэж нэрлэе. Хэрвээ $T \subset S$ олонлогийн аль ч хоёр элемент нь k -найзууд бол T олонлогийг *k-нөхөрлөл* гэе. Дор хаяж 200 элементтэй k -нөхөрлөл оршин байдаг хамгийн бага k натурал тоог ол.

11. n, k нь тэгш сондгойгоороо ижил натурал тоонууд ба $k \geq n$ байг. Бидэнд $1, 2, \dots, 2n$ гэж дугаарлагдсан $2n$ ширхэг чийдэн өгөгдсөн ба эхэндээ бүх чийдэн унтраалттай байжээ. Бид k алхамтай дараалал сонирхоё. Алхам тутамд чийдэнгүүдийн аль нэгийн төлвийг өөрчилнө (унтраалттай чийдэнг асааж, асаалттай чийдэнг унтраана).

N нь $1, \dots, n$ чийдэнгүүд асаалттай, $n+1, \dots, 2n$ чийдэнгүүд унтраалттай байх төлөвт шилжих k алхамын тоо гэе.

M нь $n+1, \dots, 2n$ чийдэнгүүдийн төлвийг огт өөрчилөхгүйгээр өмнөхтэй ижил төлөвт шилжих k алхамын тоо гэе.

Тэгвэл N/M харьцааг ол.

12. k, ℓ натурал тоонууд ба элементүүд нь $[0, 1]$ интервалд байх бодит тоонуудын $(k + \ell)$ элементтэй $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+\ell}\}$ олонлог өгчээ. k элементтэй $A \subset S$ олонлог

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{\ell} \sum_{x_j \in S \setminus A} x_j \right| \leq \frac{k + \ell}{2k\ell}$$

нөхцөлийг хангах бол түүнийг гоё олонлог гэе. Дор хаяж $\frac{2}{k+\ell} \binom{k+\ell}{k}$ ширхэг гоё олонлог оршин байхыг батал.

13. $n \geq 2$ натурал тоо. $A = \{1, 2, 3, \dots, 2^{n+1}\}$ олонлогийн 2^n ширхэг дэд олонлог $S_1, S_2, \dots, S_{2^n}$ дараах чанарыг хангадаг: $x < y < z$ ба $y, z \in S_a$, $x, z \in S_b$ байх a, b индекс, $x, y, z \in A$ тоонууд оршин байхгүй. Тэгвэл $S_1, S_2, \dots, S_{2^n}$ олонлогуудын ядаж нэг нь $4n$ -ээс хэтрэхгүй тооны элементтэй гэдгийг батал.

14. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэг нь H . BC талын дундач цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог BC шулууныг A_1 ба A_2 цэгүүдэд огтолно. Мөн адилаар CA талын дундач цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог CA шулууныг B_1 ба B_2 цэгүүдэд огтолно, AB талын дундач цэг дээр төвтэй H цэгийг дайрсан тойрог AB шулууныг C_1 ба C_2 цэгүүдэд огтолно. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

15. AB, CD сууриудтай $ABCD$ трапец өгөгдөв. BC шулуун дээр BC хэрчмийн гадна талд орших E цэг, AD хэрчим дээр орших F цэгийн хувьд $\angle DAE = \angle CBF$ нөхцөл биелдэг байг. CD ба EF -ийн огтлолцлын цэгийг I , AB ба EF -ийн огтлолцлын цэгийг J гэж тэмдэглэе. EF хэрчмийн дундач цэг K нь AB шулуун дээр оршдоггүй гэе. ABK гурвалжныг багтаасан тойрогт I цэг харъяалагдах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь CDJ гурвалжныг багтаасан тойрогт K цэг харъяалагдах юм гэдгийг батал.

16. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт байг. P, Q цэгүүд $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотоод мужид орших бөгөөд $PQDA, QPBC$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана. PQ хэрчим дээр $\angle PAE = \angle QDE$ ба $\angle PBE = \angle QCE$ байх E цэг оршин байдаг байг. $ABCD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

17. Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд BE, CF өндөр татав. A, F цэгүүдийг дайрсан тойрогууд BC -г P ба Q цэгт шүргэдэг бөгөөд B цэг C, Q цэгүүдийн хооронд оршдог. PE, QF шулуунууд AEF гурвалжныг багтаасан тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

18. k, n бүхэл тоонууд $0 \leq k \leq n-2$ нөхцөлийг хангадаг байг. Аль ч хоёр нь параллел биш, аль ч гурав нь нэг цэгт огтлолцдоггүй хавтгайн n ширхэг шулуунаас тогтоох L олонлог авч үзье. L дэх шулуунуудын огтлолцлын цэгүүдийн олонлогийг I гэж тэмдэглэе. O цэг L -ийн шулуунуудын алинд нь ч харъяалагддаггүй байг. Хэрвээ OX хэрчим хамгийн олондоо L -ийн k ширхэг шулуунтай огтолцдог бол X цэгийг улаан өнгөөр будъя. I олонлогт дор хаяж $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ ширхэг улаан цэг байгаа гэж батал.

19. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. Уг дөрвөн өнцөгтийн дотоод мужид

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90^\circ$$

нөхцөлийг хангах P цэг оршин байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь AC ба BD диагоналиуд перпендикуляр гэж батал.

20. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн $AB \neq BC$. ABC, ADC гурвалжинд багтсан тойргууд харгалзан ω_1, ω_2 . ABC өнцөгт багтсан AD, CD талуудын үргэлжлэлүүдийг шүргэдэг ω тойрог оршин байдаг гэе. ω_1, ω_2 тойргуудын гадаад ерөнхий шүргэгч ω тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

21. n натурал тоо, p анхны тоо байг. a, b, c бүхэл тоонуудын хувьд

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

бол $a = b = c$ гэж батал.

22. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ялгаатай натурал тоонууд ба $n \geq 3$ байг. $a_i + a_j$ тоо $3a_1, 3a_2, \dots, 3a_n$ тоонуудын алийг нь ч хуваадаггүй байхаар ялгаатай i, j индексүүд олдоно гэж батал.

23. $a_0, a_1, a_2, \dots$ натурал тоон дарааллын аль ч дараалсан хоёр гишүүний хамгийн их ерөнхий хуваагч өмнөх гишүүнээсээ их. Өөрөөр хэлбэл $(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ байна. Аливаа $n \geq 0$ -ийн хувьд $a_n \geq 2^n$ болохыг батал.

24. n натурал тоо байг.

$$\binom{2^n - 1}{0}, \quad \binom{2^n - 1}{1}, \quad \binom{2^n - 1}{2}, \quad \dots, \quad \binom{2^n - 1}{2^{n-1} - 1}$$

тоонууд 2^n модулаар $1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$ тоонуудын сэлгэмэл болохыг батал.

25. $n \in \mathbb{N}$ тооны (эерэг) хуваагчдын тоог d гэж тэмдэглэе. Дараах чанартай бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

(i) $d(f(x)) = x, x \in \mathbb{N}$;

(ii) аливаа $x, y \in \mathbb{N}$ тоонуудын хувьд $f(xy)$ тоо $(x-1)y^{xy-1}f(x)$ -д хуваагддаг.

26. $n^2 + 1$ тоо $2n + \sqrt{2n}$ -ээс их анхны тоон хуваагчтай байх n төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.