

IMO shortlist 2007

1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бодит тоон дараалал өгөгдөв. i ($1 \leq i \leq n$) тоо бүрийн хувьд

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

ба

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

гэж тодорхойлъя.

1. Аливаа $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ бодит тоонуудын хувьд

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (1)$$

болохыг батал.

2. (1) тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрдэг байх $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ дараалал оршин байхыг харуул.

2. Аливаа $m, n \in \mathbb{N}$ натурал тоонуудын хувьд

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

чанарыг хангадаг $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцүүдийг авч үзье. $f(2007)$ -ийн боломжит бүх утгыг ол.

3. n натурал тоо ба x, y нь $x^n + y^n = 1$ байх бодит тоонууд байг.

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} \right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

болохыг батал.

4. Аливаа $x, y \in \mathbb{R}^+$ тоонуудын хувьд

$$f(x+f(y)) = f(x+y) + f(y) \quad (1)$$

байх бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцүүдийг ол. (Энд $\mathbb{R}^+$ нь эерэг бодит тоонуудын олонлог.)

5. $c > 2$ ба $a(1), a(2), \dots$ нь сөрөг биш бодит тоонуудын дарааллын хувьд аливаа $m, n \geq 1$ -ийн хувьд

$$a(m+n) \leq 2a(m) + 2a(n) \quad (1)$$

ба аливаа $k \geq 0$ -ийн хувьд

$$a(2^k) \leq \frac{1}{(k+1)^c}$$

биелдэг байг. $a(n)$ дараалал зааглагдсан гэдгийг батал.

6. $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ нь $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$ нөхцөлийг хангах сөрөг биш бодит тоонууд байг.

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1 < \frac{12}{25}$$

болохыг батал.

7. $n > 1$ нь бүхэл тоо байг. Огторгуйн

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

дэд олонлогийг авч үзье. Нэгдэл нь S олонлогийн бүх $(n+1)^3 - 1$ цэгийг агуулдаг аль нь ч координатын эхийг дайрдаггүй хамгийн цөөн хавтгайн тоог ол.

8. $n > 1$ бүхэл тоо байг. Дараах нөхцөлүүдийг хангах бүх $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+n}$ дарааллуудыг ол.

1. Аливаа $1 \leq i \leq n^2 + n$ бүрийн хувьд $a_i \in \{0, 1\}$;
2. Аливаа $0 \leq i \leq n^2 - n$ бүрийн хувьд $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+n} < a_{i+n+1} + a_{i+n+2} + \dots + a_{i+2n}$.

9. Нэгж квадратыг талууд нь уг квадратын талуудтай параллел $n > 1$ ширхэг тэгш өнцөгтөд хуваав. Квадратын аль нэг талтай параллел квадратыг хуваадаг аливаа шулуун өөр нэг тэгш өнцөгтийг мөн хуваадаг. Тэгвэл энэ хуваалтад квадратын талуудтай ерөнхий талгүй тэгш өнцөгт олдоно гэж харуул.

10. Дараах нөхцөл биелж байхаар $S = \{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн элементүүдийг улаан ба цэнхэр өнгөөр будаж болдог байх бүх n натурал тоог ол: $S \times S \times S$ нь яг 2007 ширхэг (i) x, y, z нь нэг ижил өнгөөр будагдсан (ii) $x + y + z$ нь n -д хуваагддаг байх эрэмбэлэгдсэн (x, y, z) гуравт агуулдаг.

11. $A_0 = (a_1, \dots, a_n)$ нь бодит тоонуудын төгсгөлөг дараалал байг. $k \geq 0$ бүрийн хувьд $A_k = (x_1, \dots, x_n)$ дарааллаас шинэ A_{k+1} дарааллыг дараах байдлаар үүсгэе. Үүнд

1. $\{1, \dots, n\} = I \cup J$ гэсэн үл огтлолцох I, J олонлогуудыг

$$\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right|$$

илэрхийлэл хамгийн бага утгатай байхаар сонгоно. (I эсвэл J -ийн аль нэг нь хоосон байж болох бөгөөд энэ тохиолдолд харгалзах нийлбэр нь 0-тэй тэнцүү гэж үзнэ.) Хэрэв ийм хуваалт хэд хэд байвал аль нэгийг нь дураар сонгоно.

2. $A_{k+1} = (y_1, \dots, y_n)$ ба энд $i \in I$ бол $y_i = x_i + 1$, $i \in J$ бол $y_i = x_i - 1$ байна.

Ямар нэг k дугаарын хувьд A_k дараалал $|x| \geq n/2$ байх x гишүүнтэй гэдгийг батал.

12. Декартын координатын системд аливаа n тоо бүрийн хувьд $S_n = \{(x, y) \mid n \leq x < n+1\}$ судал тодорхойлъя. S_n судал бүрийг улаан эсвэл хөх өнгийн аль нэгээр будсан гээ. Хэрвээ a, b нь ялгаатай натурал тоонууд бол талуудын урт нь a, b байх бүх орой нь нэг өнгийн тэгш өнцөгт олдоно гэж батал.

13. Математикийн олимпиадад оролцогсодын зарим нь өөр хоорондоо найзууд байв. Найзууд харилцан бие биенээ танина. Аль ч хоёр нь найз байдаг хэсэг оролцогсодыг нөхөрлөл, нөхөрлөлийн гишүүдийн тоог түүний хэмжээ гэе.

Хамгийн олон гишүүнтэй нөхөрлөлийн хэмжээ тэгш гэдэг нь мэдэгдэж байв. Тэгвэл оролцогсодыг 2 өрөөнд, өрөө тус бүрийн хамгийн олон гишүүнтэй нөхөрлөлийн хэмжээ нь тэнцүү байхаар байрлуулж болохыг батал.

14. $\alpha < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ нь эерэг бодит тоо байг. Тэгвэл $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогоос хос хосоороо ялгаатай $S_i \cap T_j \neq \emptyset$, $1 \leq i, j \leq p$ чанартай $S_1, \dots, S_p, T_1, \dots, T_p$ гэсэн $2p$ ширхэг дэд олонлог сонгож болдог байх n ба $p > \alpha \cdot 2^n$ тоонууд олдоно гэж батал.

15. Хавтгайд P гэсэн гүдгэр n өнцөгт өгөгдөв. P -ийн гурван оройгоор үүсэх боломжит бүх гурвалжнуудыг авч үзье. Хэрвээ ийм гурвалжны бүх талууд нь нэгж урттай бол түүнийг *сайн* гурвалжин гэе. Сайн гурвалжны тоо $\frac{2}{3}n$ -ээс хэтрэхгүй гэж харуул.

16. ABC гурвалжны C өнцгийн биссектрис багтаасан тойрог ба BC , CA талуудын дундаж перпендикуляруудыг харгалзан R , P , Q цэгүүдэд огтолдог. BC , CA талуудын дундажууд нь харгалзан S , T байг. RQT , RPS гурвалжнуудын талбай тэнцүү болохыг батал.

17. $AB = AC$ байх ABC гурвалжин өгөгдөв. BC талын дундаж цэгийг M гэе. X нь ABM гурвалжныг багтаасан тойргийн MA богино нум дээр орших ямар нэг цэг байг. T нь BMA өнцгийн дотоод мужид орших $\angle TMX = 90^\circ$, $TX = BX$ нөхцөлүүдийг хангах цэг гэе. Тэгвэл $\angle MTB - \angle CTM$ нь X цэгийн байрлалаас хамаарахгүй болохыг батал.

18. $ABCD$ трапецийн диагоналиуд P цэгт огтлолцдог. Q нь BC , AD параллел шулуунуудын хооронд орших $\angle AQD = \angle CQB$ нөхцөлийг хангах цэг ба CD нь P ба Q цэгүүдийг тусгаарладаг байв. $\angle BQP = \angle DAQ$ болохыг батал.

19. A, B, C, D, E таван цэгийн хувьд $ABCD$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм, $BCED$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтдаг байв. A цэгийг дайрсан ℓ шулуун DC , BC хэрчмүүдийг харгалзан F , G цэгт огтолдог гэе. $EF = EG = EC$ гэж үзье. Тэгвэл ℓ шулуун DAB өнцгийн биссектрис болохыг батал.

20. ABC гурвалжны BC , CA , AB талуудын дундаж цэгүүд нь харгалзан A_1 , B_1 , C_1 гэе. Уг гурвалжныг багтаасан тойрог дээр P цэг авъя. PA_1 , PB_1 , PC_1 шулуунууд багтаасан тойргийг харгалзан A' , B' , C' цэгүүдэд дахин огтолдог байг. A , B , C , A' , B' , C' цэгүүд нь ялгаатай цэгүүд ба AA' , BB' , CC' шулуунууд гурвалжин үүсгэдэг гэж үзье. Тэгвэл энэ гурвалжны талбай P цэгийн сонголтоос хамаарахгүй гэж батал.

21. Дараах чанартай хамгийн бага k бодит тоог ол:

A_1, B_1, C_1, D_1 цэгүүд $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB , BC , CD , DA талууд дээр харгалзан оршдог байг. AA_1D_1 , BB_1A_1 , CC_1B_1 , DD_1C_1 гурвалжнуудын талбайн хоёр багынх нийлбэр S ба $A_1B_1C_1D_1$ дөрвөн өнцөгтийн талбай S_1 -ийг авч үзье. Тэгвэл $kS_1 \geq S$ тэнцэтгэл биш ямагт биелнэ.

22. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны A, B, C орой дахь өнцөгүүд харгалзан α, β, γ ба $\beta > \gamma$ байв. Багтсан тойргийн төв I , багтаасан тойргийн радиус R . A оройгоос татсан өндрийн суурь D . K цэг AD хэрчим дээр орших бөгөөд $AK = 2R$ ба D цэг A ба K цэгүүдийн хооронд байрлана. DI, KI шулуунууд AC, BC талуудыг харгалзан E, F цэгүүдэд огтолно. Хэрвээ $IE = IF$ бол $\beta \leq 3\gamma$ болохыг харуул.

23. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB тал дээр P цэг оршино. CPD гурвалжинд багтсан тойрог ω , төв нь I байг. ω тойрог APD, BPC гурвалжнуудад багтсан тойргуудтай харгалзан K, L цэгүүдэд шүргэлцдэг байг. AC ба BD шулуунууд E цэгт, AK ба BL шулуунууд F цэгт огтлолцдог гээ. E, I, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

24. $7^k - 3^n \mid k^4 + n^2$ байх натурал тоонуудын бүх (k, n) хосуудыг ол.

25. $b, n > 1$ бүхэл тоонууд байг. Аливаа $k > 1$ тооны хувьд $b - a_k^n$ тоо k -д хуваагддаг байхаар a_k олддог гээ. Тэгвэл ямар нэг A бүхэл тооны хувьд $b = A^n$ гэж батал.

26. Аль нь ч 47-д хуваагддаггүй 10 000 ширхэг бүхэл тооноос тогтох X олонлог өгчээ. Аливаа $a, b, c, d, e \in Y$ тоонуудын хувьд $a - b + c - d + e$ тоо 47-д хуваагддаггүй байх 2007 элементтэй X -ийн дэд олонлог Y оршин байхыг батал.

27. Аливаа $k \geq 2$ тооны хувьд

$$\binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}$$

тоо 2^{3k} -д хуваагдах ба 2^{3k+1} -д хуваагдахгүй гэдгийг батал.

28. Аливаа $m, n \in \mathbb{N}$ тоонууд ба p анхны тооны хувьд $p \mid f(m+n)$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $p \mid f(m) + f(n)$ байдаг чанартай бүх суръектив $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол. ($\mathbb{N}$ натурал тоон олонлог.)

29. k натурал тоо. $(4k^2 - 1)^2$ тоо $8kn - 1$ хэлбэрийн хуваагчтай байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь k тэгш гэж батал.

30. p анхны тоо ба n натурал тооны хувьд $\nu_p(n)$ -ээр $n!$ -ийн каноник задаргаан дахь p -ийн илтгэгчийг тэмдэглэе. d натурал тоо ба $\{p_1, \dots, p_k\}$ анхны тоонуудын төгсгөлөг олонлог өгөгдөв. Аливаа $1 \leq i \leq k$ -ийн хувьд $d \mid \nu_{p_i}(n)$ байх n натурал тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

31. a ба b натурал тоонууд. $(4a^2 - 1)^2$ тоо $4ab - 1$ -д хуваагддаг бол $a = b$ болохыг батал.