ММО-24

1.

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 4(y+z) \end{cases}$$

системийн бүх сөрөг биш, бүхэл шийдийг ол.

2. Хавтгай дээр тойрог ба A цэг өгөгджээ. A цэгийг дайрсан огтлогчийн тойрогтой огтлолцсон цэгүүдэд татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын геометр байрыг ол.

3. Хавтгай дээр ерөнхий байршилтай $2n$ ($n \geq 4$) ширхэг цэг өгөгджээ. Аль ч цэг нь яг нэг хэрчмийн үзүүр байхаар эдгээр цэгийг n ширхэг хэрчмээр, бүх хэрчмийг нэг шулуунаар огтолж а) болдог б) болдоггүй байхаар холбож болохыг тус тус батал.

4. $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 7x_n + 4\sqrt{3x_n^2 + 1}$ ($n \geq 1$) дарааллын гишүүн бүр тэгш натурал тоо байхыг батал.

5. ABC гурвалжны AB, BC талууд дээр $\angle BCN = \frac{1}{3}\angle BCA$, $\angle BAM = \frac{1}{3}\angle BAC$ байхаар N ба M цэгийг сонгон авчээ. Хэрэв $CN = AM$ бол ABC гурвалжин адил хажуут гэж батал.

6. 5^n ($n \geq 1$) радиустай тойрог дээр аль ч хоёрын нь хоорондох зай бүхэл байхаар $n+1$ ширхэг цэг сонгон авч болохыг батал.