

ММО-40

1. $m \in \mathbb{N}$, $(m, 6) = 1$ байг. S_m нь m -ээс бага m -тэй харилцан анхны натурал тоонуудын олонлог ба $\sum_{n \in S_m} \frac{1}{n} = \frac{A}{B}$, $A, B \in \mathbb{N}$ бол $m^2 \mid A$ гэж батал.

2. $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ба $A_1, A_2, \dots, A_m$ нь S -ийн k элементтэй дэд олонлогууд, $B_1, B_2, \dots, B_m$ нь ℓ элементтэй дэд олонлогууд ба $k + \ell \leq n$ байг. Хэрэв дурын $i \neq j$ хувьд $A_i \cap B_i = \emptyset$ ба $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ байдаг бол $m \leq C_{k+\ell}^\ell$ гэж батал.

3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналийн дундаж цэгүүдийг харгалзан P, Q ; PQ шулууны AB, CD -тэй огтлолцох цэгүүдийг харгалзан N, M гэе. Тэгвэл NAP, NBQ, MQD, MPC гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

4. $1, 2, \dots, n$ тоонуудын $\forall k (1 \leq k \leq n)$ хувьд $|a_k - k| = 0$, эсвэл 1, эсвэл 2 байх $a_1, a_2, \dots, a_n$ сэлгэмлийн тоог A_n гэж тэмдэглэе. $n \geq 6$ үед $A_n = 2a_{n-1} + 2A_{n-3} - A_{n-5}$ тэнцэл биелнэ гэж батал.

5. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн AC талтай шүргэлцэх цэгийг D гэе. $[BD), [DC)$ цацрагууд ба ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг гадаад байдлаар шүргэсэн тойрог B өнцөгт харгалзах гадаад багтсан тойрогтой тэнцүү гэж батал.

6. $1, 2, 3, \dots, 40$ тоонуудыг тойрог дээр дараалсан аливаа a, b, c тоонуудын хувьд $41 \mid b^2 - ac$ байхаар хэдэн янзаар байрлуулж чадах вэ? (Эргүүлэлт, тэгш хэмээр бие биедээ шилждэг байрлуулалтуудыг нэг байрлуулт гэж тооцно).