

IMO shortlist 2006

1. $a_0, a_1, a_2, \dots$ бодит тоон дараалал

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \langle a_i \rangle, \quad i \geq 0;$$

ба a_0 дурын бодит тоо гэж өгөгдөв. Энд $\lfloor a_i \rfloor$ нь a_i тооноос хэтрэхгүй хамгийн их бүхэл тоо ба $\langle a_i \rangle = a_i - \lfloor a_i \rfloor$ байг. Хангалттай их i тооны хувьд $a_i = a_{i+2}$ болохыг батал.

2. $a_0, a_1, a_2, \dots$ бодит тоон дараалал

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0, \quad n \geq 1$$

рекуррент томъёогоор өгөгдөв. $n \geq 1$ үед $a_n > 0$ болохыг харуул.

3. $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ дараалал $c_0 = 1, c_1 = 0, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n, n \geq 0$ гэж тодорхойлогдов. Ямар нэг төгсгөлөг J олонлогийн хувьд $x = \sum_{j \in J} c_j, y = \sum_{j \in J} c_{j-1}$ байх бүх (x, y) эрэмбэлэгдсэн хосуудын олонлог S -ийг авч үзье. Дараах чанартай α, β, m, M бодит тоонууд оршин байхыг батал: Сөрөг биш бүхэл тоонуудын (x, y) эрэмбэлэгдсэн хосуудын хувьд

$$m < \alpha x + \beta y < M$$

байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $(x, y) \in S$ байна.

4. $a_1, \dots, a_n$ эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\sum_{i < j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \sum_{i < j} a_i a_j$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

5. a, b, c нь гурвалжны талууд байг.

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$$

болохыг батал.

6. Аливаа a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэх байх хамгийн бага бодит тоо M -г ол.

7. $L_1, \dots, L_n, n \geq 2$ чийдэнгүүд дараалж байрласан байв. Эдгээрийн зарим нь асаалттай, үлдсэн нь унтраастай байв. Секунд бүрд бид чийдэнгүүдийн төлвийг нэгэн зэрэг дараах дүрмээр өөрчилнө.

— Хэрэв L_i ба түүний хөрш ($i = 1$ эсвэл $i = n$ тохиолдолд 1 хөрш, бусад тохиолдолд хоёр хөрштэй) чийдэнгүүд ижил төлөвт байвал L_i чийдэнг унтраана.

— бусад тохиолдолд L_i чийдэнг асаана.

Эхлээд хамгийн зүүн талын чийдэн асаалттай бусад нь унтраастай байв.

1. Бүх чийдэнгүүд нэгэн зэрэг унтраастай төлөвт очих боломжтой n төгсгөлгүй олон олдохыг батал.
2. Бүх чийдэнгүүд хэзээ ч нэгэн зэрэг унтраастай төлөвт очдоггүй n төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

8. Зөв 2006 өнцөгт P -ийн диагоналын төгсгөлийн цэгүүд нь P -ийн хилийг тус бүр сондгой тооны тал агуулах хоёр хэсэгт хувааж байвал түүнийг *сайн* гээ. P -ийн талуудыг мөн *сайн* гээ. Аль ч хоёр нь P -ийн дотор ерөнхий цэггүй байх 2003 диагоналаараа P гурвалжнуудад хуваагдсан байг. Тийм хуваалтад хоёр сайн талтай адил хажуут гурвалжин хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

9. Хавтгайн төгсгөлөг цэгүүдээс тогтох S олонлогийн аль ч гурван цэг нь нэг шулуун дээр оршдоггүй байв. Оройнууд нь S олонлогийн элемент байх P гүдгэр олон өнцөгтийн хувьд $a(P)$ нь оройн тоог, $b(P)$ нь P олон өнцөгтийн гадна талд байрлах S -д харъяалагдах цэгийн тоог тэмдэглэж байв. Аливаа x бодит тооны хувьд

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

байхыг батал. Энд бүх оройнууд нь S олонлогийн элемент байх бүх P гүдгэр олон өнцөгтүүдээр нийлбэрчилж байна.

NB. Хэрчим, цэг, оройн хоосон олонлог нь харгалзан 2, 1, 0 оройтой гүдгэр олон өнцөгтүүд болохыг анхаар.

10. n^2 ширхэг нэгж квадратаас тогтох $n \times n$ квадрат хэлбэрийн бялуу байжээ. Түүний мөр ба багана бүрд яг нэг ширхэг гүзээлзгэнэ байрласан байв. Үүнийг $\mathcal{A}$ байрлуулалт гээ.

$\mathcal{B}$ нь өөр нэгэн тийм байрлуулалт байв. Нэг орой нь бялууны зүүн дээд орой байдаг, өгөгдсөн нэгж квадратуудаас тогтох тэгш өнцөгт хэлбэртэй бялуу бүрийн хувьд $\mathcal{B}$ байрлуулалт $\mathcal{A}$ байрлуулалтаас цөөнгүй тооны гүзээлзгэнэтэй байг. Тэгвэл дараах *үйлдлийн* тусламжтайгаар $\mathcal{A}$ байрлуулалтаас $\mathcal{B}$ байрлуулалтад шилжиж чадахыг батал.

Нэг удаагийн *үйлдэлээр* зүүн доод ба баруун дээд буландаа л гүзээлзгэнэтэй аль нэг тэгш өнцөгтийг сонгоод гүзээлзгэнүүдийг нь нөгөө хоёр буланд нь шилжүүлж байрлуулна.

11. (n, k) тэмцээнд n тоглогч оролцож дараах байдлаар k тойрог үргэлжилнэ:

1. Тоглогч бүр бүх тойрогт тоглох бөгөөд аль ч хоёр тоглогч хамгийн олондоо нэг удаа хоорондоо тоглоно.
2. Хэрвээ A тоглогч B тоглогчтой i -р тойрогт таарсан, C тоглогч D тоглогчтой i -р тойрогт таарсан, мөн A тоглогч C тоглогчтой j -р тойрогт таарсан бол B тоглогч D тоглогчтой j -р тойрогт таарна.

(n, k) тэмцээн оршин байх бүх (n, k) хосыг ол.

12. Талынх нь урт n -тэй тэнцүү, дээшээ чиглэсэн адил талт гурвалжинд n ширхэг мөн л дээшээ чиглэсэн, нэгж талтай зөв гурвалжин хэлбэрийн нүх гаргасан бол нүхлэгдсэн гурвалжин гэе. Алмаз нь $60^\circ - 120^\circ$ өнцгүүдтэй нэгж талтай ромбо юм. T нүхлэгдсэн гурвалжинг алмазаар хучиж болох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь T доторх орших, талын урт нь k -тай тэнцүү аливаа зөв гурвалжин хамгийн олондоо k ширхэг нүхтэй байх явдал юм. Энд k нь $1 \leq k \leq n$ байна.

13. Аль ч хоёр ирмэг нь параллел биш, аль ч ирмэг нь хөрш талуудаасаа өөр параллел талсгүй гүдгэр олон талст авч үзье. Аливаа хоёр цэгийн хувьд тэдгээрийг агуулсан ямар нэг параллел хавтгайнуудын хооронд өгөгдсөн олон талст бүхлээрээ оршдог бол тэдгээрийг эсрэг байрлалтай цэгүүд гэе.

A нь оройн цэгүүдээс тогтох эсрэг байрлалтай хосын тоо, B нь ирмэгүүдийн дундаж цэгүүдээс тогтох эсрэг байрлалтай хосын тоо бол $A - B$ -г олон талстын оройн тоо, ирмэгийн тоо ба талсын тоогоор илэрхийл.

14. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. Уг гурвалжин дотор P цэгийг

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

байхаар авав. $AP \geq AI$ болохыг баталж, тэнцэл болох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь P цэг I -тэй давхцах явдал гэж батал.

15. $ABCD$ нь сууриуд нь $AB > CD$ нөхцөлийг хангах трапец байг. K ба L цэгүүд нь харгалзан AB ба CD хэрчмүүд дээр орших ба $AK/KB = DL/LC$ нөхцөлийг хангана. P ба Q цэгүүд нь KL хэрчим дээр орших

$$\angle APB = \angle BCD \text{ ба } \angle CQD = \angle ABC$$

нөхцөлийг хангадаг цэгүүд гэе. Тэгвэл P, Q, B, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

16. $ABCDE$ гүдгэр 5 өнцөгтийн хувьд

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \text{ ба } \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$$

байв. BD, CE диагоналууд P цэгт огтлолцдог. Тэгвэл AP шулуун CD хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

17. ABC гурвалжны $\angle C < \angle A < 90^\circ$ ба AC тал дээр нь $BD = BA$ байхаар D цэг авав. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB, AC талуудыг харгалзан K ба L цэгүүдэд шүргэнэ. J нь BCD гурвалжинд багтсан тойргийн төв. KL шулуун AJ хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

18. ABC гурвалжны хувьд J нь BC талыг A_1 цэгт, AC ба AB талуудын үргэлжлэлийг харгалзан B_1 ба C_1 цэгт шүргэдэг гадаад багтсан тойргийн төв байг. A_1B_1 ба AB шулуунууд перпендикуляр бөгөөд D цэг огтлолцдог гэе. E нь C_1 цэгээс DJ шулуунд татсан перпендикуляр шулууны суурь. $\angle BEA_1$ ба $\angle AEB_1$ өнцгүүдийг ол.

19. Харгалзан O_1 ба O_2 төвтэй ω_1 ба ω_2 тойргууд D цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэх бөгөөд ω тойргийг харгалзан E ба F цэгт дотоод байдлаар шүргэнэ. t нь ω_1 ба ω_2

тойргуудыг D цэгт шүргэх ерөнхий шүргэгч шулуун. AB нь ω тойргийн t шулуунд перпендикуляр диаметр ба A, E, O_1 цэгүүд t шулууны нэг ижил талд оршино. AO_1, BO_2, EF, t шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

20. ABC гурвалжны BC, CA, AB талуудын дундаж цэгүүд нь харгалзан M_a, M_b, M_c ; ABC -г багтаасан тойргийн BC, CA, AB нумуудын нөгөө оройг агуулаагүй нумын дундаж цэгүүд нь харгалзан T_a, T_b, T_c байв. $i \in \{a, b, c\}$ индексүүдийн хувьд ω_i нь $M_i T_i$ диаметртэй тойргууд байв. p_i нь ω_j, ω_k ($\{i, j, k\} = \{a, b, c\}$) тойргуудын ω_i нь ω_j, ω_k -ийн эсрэг талд орших гадаад ерөнхий шүргэгч шулуун гэе. p_a, p_b, p_c шулуунууд ABC -тай төсөөтэй гурвалжин үүсгэхийг батал. Төсөөгийн коэффициентийг ол.

21. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. A, D цэгүүдийг дайрсан тойрог B, C цэгүүдийг дайрсан тойрогтой дөрвөн өнцөгтийн дотоод мужид орших P цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэнэ.

$$\angle PAB + \angle PDC \leq 90^\circ \text{ ба } \angle PBA + \angle PCD \leq 90^\circ$$

гэе. $AB + CD \geq BC + AD$ болохыг батал.

22. ABC гурвалжны BC, CA, AB талууд дээр харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгүүд авав. $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ гурвалжнуудыг багтаасан тойрог ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой харгалзан A_2, B_2, C_2 цэгүүдэд ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$) огтлолцоно. A_3, B_3, C_3 нь харгалзан BC, CA, AB талуудын дундаж цэгүүдийн хувьд A_1, B_1, C_1 цэгүүдтэй тэгш хэмтэй цэгүүд бол $A_2B_2C_2$ гурвалжин $A_3B_3C_3$ гурвалжинтай төсөөтэй гэдгийг батал.

23. Гүдгэр олон өнцөгт P -ийн b тал бүрд, нэг тал нь b -тэй давхцах P -д агуулагдах гурвалжнуудын талбайн хамгийн ихийг харгалзуулъя. P -ийн бүх талуудад харгалзах талбайнуудын нийлбэр, P -ийн талбайг хоёр дахин авснаас багагүй гэж батал.

24.

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

байх бүхэл тооны бүх хос (x, y) -г ол.

25. $x \in (0, 1)$ тооны хувьд $y \in (0, 1)$ тооны таслалаас хойших n дэх цифр нь x тооны таслалаас хойших (2^n) дэх цифртэй тэнцүү. Хэрвээ x рационал тоо бол y ч мөн адил рационал тоо гэж харуул.

26. $f(1), f(2), f(3), \dots$ дараалал

$$f(n) = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right)$$

гэж тодорхойлогдов. Энд $\lfloor x \rfloor$ нь x тоон бүхэл хэсэг юм.

(a) $f(n+1) > f(n)$ төгсгөлгүй олон тохиолдохыг батал.

(b) $f(n+1) < f(n)$ төгсгөлгүй олон тохиолдохыг батал.

27. $P(x)$ бүхэл коэффициенттэй $n > 1$ зэргийн олон гишүүнт ба k нь натурал тоо байг.

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$$

олон гишүүнт авъя (энд P яг k удаа орсон). $Q(t) = t$ байх t бүхэл тоо n -ээс илүүгүй оршин байхыг батал.

28.

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$

тэгшитгэлийн бүх бүхэл шийдийг ол.

29. $a > b > 1$ нь өгөгдсөн харилцан анхны натурал тоонууд.

$$ax + by = c$$

байх бүх боломжит x, y бүхэл тоонуудаар зохиогдох $|x| + |y|$ нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг c бүхэл тооны жин гээд $w(c)$ гэж тэмдэглэе. Хэрвээ $w(c) \geq w(c \pm a)$ ба $w(c) \geq w(c \pm b)$ биелдэг бол c тоог *хэсгийн аварга* гэе. Бүх хэсгийн аваргууд болон тэдгээрийн тоог ол.

30. Натурал тоо n бүрийн хувьд $2^m + m$ тоо n -д хуваагддаг байхаар m бүхэл тоо олдохыг батал.