ММО-55

1. $2n$ оройтой олон өнцөгт бүрийн хувьд түүнийг тэнцүү тооны оройтой хоёр олон өнцөгтөд хуваадаг, уг олон өнцөгтөд бүхлээрээ багтдаг диагональ татаж чаддаг байх бүх $n \geq 2$ тоог ол.

2. ABC гурвалжны A, C цэгүүдийг дайрсан тойрог AB, BC хэрчмүүдийг харгалзан B цэгээс ялгаатай M, K цэгүүдэд огтолдог байв. BKM гурвалжныг багтаасан тойрог AK хэрчимтэй D цэгт огтлолцдог ба BD шулуун MK хэрчимтэй S цэгт, AC хэрчимтэй L цэгт огтлолцдог байв. AB тал дээр T цэгийг $\angle ALT = \angle CBL$ байхаар авсан бол TS шулуун AK шулуунтай параллель гэж батал.

3. Дурын натурал $k \geq 1$ тооны хувьд 7^k тоонд хуваагдах

$$1 + 2^n + 3^n$$

хэлбэрийн тоо олдоно гэдгийг батал.

4. $0 \leq a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{1 - a_1 a_2 \ldots a_n}{n} \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

5. 20×20 хүснэгтийн зарим нүдийг хар өнгөөр будахыг будалт гэе. Өгөгдсөн P будалтын хувьд хүснэгтээ хоёроос олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд шугамын дагуу хуваахад нэгээс олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтийн тоо хамгийн багадаа $n(P)$ байдаг гэе. $n(P)$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

6. I төвтэй ω тойргийг багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. AD, BC шулуунууд Q цэгт, харин AB, CD шулуунууд P цэгт огтлолцдог бөгөөд B цэг AP хэрчим дээр, D цэг AQ хэрчим дээр байв. PBD, QBD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан X, Y гэе. PY, QX шулуунууд R цэгт огтлолцдог бол $RI \perp BD$ гэж батал.