ММО-55, II даваа

1. $n \geq 2$, $k \geq 2$ гэе. $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ тоонуудын арифметик дунджийг A гэвэл

$$2^{k-1}\left(|a_1 - a|^k + \cdots + |a_n - A|^k\right) \leq \left(|a_1 - A| + \cdots + |a_n - A|\right)^k$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

2. $n \geq 2$ гэе. $1, 2, \ldots, n$ дугаартай n зогсоол дээр $1, 2, \ldots, n$ дугаартай n машин байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг *зөв* гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

3. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог ω ба $\measuredangle B > \measuredangle C$ гэе. ω тойргийн A цэгийг агуулах BC нумын дундаж цэгийг T ба ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэе. ω тойрог дотор орших E цэгийн хувьд $AE \parallel BC$ ба $\measuredangle AEI = 90^\circ$ байг. TE шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэг нь P ба $\measuredangle B = \measuredangle IPB$ бол $\measuredangle A$ өнцгийг ол.

4. 2019-н тоог аль ч дараалсан таван a, b, c, d, e тооных нь хувьд $a-b+c-d+e = 55$ байхаар тойрог дээр байрлуулж болдог бол уг тоонуудыг ол.

5. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш $a_1, \ldots, a_m$ арифметик прогресс $P(a_1), \ldots, P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

6. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.