ММО-55, II даваа

1. $a, b, c > 1$ ба a, b, c дараалал геометр прогресс, харин $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$ дараалал арифметик прогресс үүсгэдэг бол уг арифметик прогрессын ялгаврын авч болох утгуудыг ол.

2. O төвтэй ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгч татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. CE нь ω тойргийн диаметр байг. DE шулууны AO ба BO шулуунтай огтлолцох цэгүүдийг харгалзан X ба Y гэвэл $OP^2 = OX \cdot OY$ гэж батал.

3. $2n \times 2n$ хүснэгтийн $n(2n+1)$ нүдэнд 1, бусад нүдэнд 0 гэж бичив. Ялгаатай хоёр мөр сонгон авч нэг мөрний i-р тоог нөгөө мөрний i-р тоонд үржүүлээд эдгээр $2n$ үржвэрийг нэмье. Ингэж олсон нийлбэр нь $\left\lfloor \dfrac{n+2}{2} \right\rfloor$-с багагүй байх ялгаатай хоёр мөр олдоно гэж харуул.

4. K цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэх ω_1 ба ω_2 тойргуудын төвүүд O_1 ба O_2 байв. O_1O_2 шулуун ω_1 ба ω_2 тойргуудыг K цэгээс ялгаатай A ба B цэгүүдэд огтолно. AB хэрчмийн дундаж цэг дээр төвтэй тойрог ω_1 ба ω_2 тойргуудыг дөрвөн цэгээр огтлоно. Энэ дөрвөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд K цэгт огтлолцоно гэж батал.

5. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш $a_1, \ldots, a_m$ арифметик прогресс $P(a_1), \ldots, P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

6. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.