

Энхболд XV

1. Натурал n тооны хувьд $n = a \cdot b$ байх натурал a, b тоонуудын нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг T_n гэж тэмдэглэе. Жишээ нь $T_4 = 2 + 2 = 4$, $T_{20} = 4 + 5 = 9$ юм. Натурал k тоо өгөгджээ. $T_n = T_{n+k}$ байх натурал n тоо төгсгөлгүй олон гэдгийг батал.

2. x, y, z эерэг бодит тоонууд ба a, b, c гурвалжны талууд бол

$$\frac{x+y}{cz} + \frac{y+z}{ax} + \frac{z+x}{by} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

3. ω тойрогт багтсан ABC гурвалжин дотор P цэгийг сонгон авчээ. AP шулуун ω тойргийг дахин X цэгт, BP шулуун ω тойргийг дахин Y цэгт огтлох бөгөөд AY, CX шулуунууд Z цэгт огтлолцоно. PZ шулуун BCP гурвалжныг багтаасан тойргийг P цэгээс ялгаатай Q цэгт огтолдог бол APQ гурвалжныг багтаасан тойрог нь ω тойргийг шүргэхийг батал.

4. 100×100 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд натурал тоонууд бичээд, мөр бүрийн ард уг мөрөнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг, багана бүрийн дор уг баганад бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг бичжээ. Бичсэн бүх 10200 ширхэг тоо нь ялгаатай бүтэн квадрат тоонууд байж болох уу?