MMO-45

1. Хурц өнцөгт ABC гурвалжинд CF ба BE өндрүүд татав. BC хэрчим дээр P цэгийг, BC шулуун дээр B нь C, Q цэгүүдийн хооронд байхаар Q цэгийг

$$BP^2 = BQ^2 = BF \cdot BA$$

байхаар авав. $QF \cap PE = S$ гэвэл $AFES$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

2.

$$x_1 = x_2 = 1; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n + 3}$$

гэсэн рекурент томъёогоор өгөгдсөн дарааллын бүх гишүүдийг бүхэл гэж батал.

3. $p \geq 5$ анхны тоо ба

$$S_n = 1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$$

байг. Тэгвэл $p^3 \mid S_n$; $p \mid S_{n-1}$ ба $p \mid S_{n-2}$ байх төгсгөлгүй олон $n \in \mathbb{N}$ тоо олдохыг харуул.

4. $a, b, c > 0$ бодит тоонуудын хувьд

$$\sqrt{\frac{3bc}{(a+b)(a+b+c)}} + \sqrt[4]{\frac{12a(a+b)}{(a+b+c)^2}} \leq 2.$$

гэж батал. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг тогтоо.

5. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ба $\forall x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(x+y) - 1$$

байх бүх функцийг ол.

6. ABC гурвалжны дотор M цэг өгөгдөв. ABM, BCM, CAM гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төв-үүд нь харгалзан C_1, A_1, B_1 бол AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.