ММО-44

1. $a, b, c, d > 0$ ба $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ бол $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

2. Дэс дараалсан 8 натурал тоог тус бүрдээ дөрөв дөрвөн тоо агуулсан 2 ангид хуваав. Хэрэв анги тус бүрийн тоонуудын квадратуудын нийлбэр тэнцүү бол анги тус бүрийн тоонуудын нийлбэр тэнцүү гэж батал.

3. $AB > BC$ ба ABC гурвалжны AB тал дээр K цэгийг $\measuredangle BCK = \measuredangle BAC$ байхаар авав. AC талын дундаж цэг M ба ACK гурвалжны биссектрисс CN болно. MN ба CK шулуунууд L цэгт огтолцдог бол BL ба CN шулуунууд паралель болохыг батал.

4. $1, 2, \ldots, 44$ натурал тоонуудыг 11 ангид дурын аргаар хуваав. Хуваалтын аль нэг хэсгээс гурвалжны тал болох гурван тоог сонгон авч чадахыг батал.

5. Хэрэв m ба n нь сөрөг биш бүхэл тоонууд ба $m > 1,\ 2^{2m+1} \geq n^2$ бол $2^{2m+1} \geq n^2 + 7$ гэж батал.

6. $n \times n$ квадрат хүснэгт өгөгдөв. Хэрэв n тэгш бол $\dfrac{n^2}{2} + 1$ ширхэг нүдийг, n сондгой бол $\dfrac{n(n+1)}{2}$ нүдийг хар өнгөөр дурын аргаар будахад хар өнгөтэй холбоост 3 нүд үргэлж олдохыг батал.