



ЭЕШ-Д БЭЛДЭХ 500 БОДЛОГО

Шинэчилсэн хөтөлбөрийн дагуу бэлтгэсэн
БОДОЛТТОЙ БОДЛОГУУД



Бодолт

Балхүүгийн Батбаясгалан



2019 он

ДАА 500
ННА 22
Б-332

ЭЕШ-д бэлдэх 500 бодлого
Шинэчилсэн хөтөлбөрийн дагуу бэлтгэсэн
БОДОЛТТОЙ БОДЛОГУУД
Бодолт

Энэхүү ном нь “Монгол Улсын Зохиогчийн эрх болон түүнд хамаарах эрхийн тухай” хуулиар хамгаалагдсан бөгөөд Интеграл-Онлайн ХХК-наас бичгээр авсан зөвшөөрөлгүйгээр цахим болон хэвлэмэл хэлбэрээр бүтнээр эсвэл хэсэгчилэн хувилах, хэвлэх, аливаа хэлбэрээр мэдээллийн санд байршуулахыг хориглоно.

Тус номын талаарх аливаа санал хүсэлтээ *baysa.edu@gmail.com* хаягаар ирүүлнэ үү.

© “Интеграл-Онлайн” ХХК, “Монгол Бодлогын Сан” (www.integral.mn)

Хэвлэх үйлдвэр: Мөнхийн үсэг
Хэвлэсэн тоо: 500 ширхэг
Зохиогч: Б. Батбаясгалан
Цаасны хэмжээ: В5
Хэвлэлийн хуудас: 7.5

ISBN: 978-99978-3-787-5

Гарчиг

Гарчиг	3
§ 3. Бодолт	5
1. Тоон илэрхийлэл 1	5
2. Илтгэгч ба логарифм илэрхийлэл 1	8
3. Тригонометр илэрхийлэл 1	10
4. Тоо тоолол сэдвийн давтлага 1	15
5. Алгебрийн илэрхийлэл 1	18
6. Алгебрийн тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 1	21
7. Илтгэгч, логарифм, тригонометр тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 1	25
8. Дараалал, Нийлбэр, Функци, Өгүүлбэртэй бодлого 1	30
9. Функци, Уламжлал, Интеграл 1	33
10. Алгебр сэдвийн давтлага 1	37
11. Хавтгайн геометр 1	42
12. Огторгуйн геометр 1	48
13. Геометр сэдвийн давтлага 1	54
14. Комбинаторик 1	62
15. Магадлал, Статистик 1	64
16. Магадлал, статистик давтлага 1	69
17. Комплекс тоо 1	73
18. Матриц 1	76
19. Математик анализийн нэмэлт 1	81
20. Статистикийн нэмэлт 1	87

Бодолт

1. Тоон илэрхийлэл 1

1.1. $n(n+2) - (n+1)(n-1) = 2n+1$ адилтгалд $n = 12340$ утга орлуулж бодвол

$$12340 \cdot 12342 - 12341 \cdot 12339 = 2 \cdot 12340 + 1 = 24681$$

байна.

1.2. $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}, \frac{1}{4} = \frac{10}{40}$ тул энэ хоёрын хооронд орших тоо нь $\frac{9}{40}$ тул зөв хариулт нь В.

Жич: Бусад тоонууд нь $\frac{8}{40}, \frac{10}{40}$ тоонуудын хооронд оршихгүйг шалгаж үзвэл энэ төрлийн бодлого бодох сайн дасгал болно.

1.3. Модулийн тодорхойлолтоор $|3| = 3, |-3| = 3$ болно. Иймд

$$|3| - |-3| = 3 - 3 = 0$$

байна.

1.4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 - \frac{2}{4 - \frac{3}{3}}} &= \frac{1}{2 - \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3 - 4}} = \\ &= \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{2 \cdot 4 - 3} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

1.5. $\frac{35}{2} : \frac{7}{4} = \frac{35 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \frac{140}{14} = 10$.

1.6. 3 нь эдгээр тоонуудын ХИЕХ, эдгээрийн алинд нь ч хуваагдахгүй. 140, 210 нь 12-д хуваагдахгүй. Харин

$$420 = 12 \cdot 35 = 15 \cdot 28 = 21 \cdot 20$$

тул 420 нь ерөнхий хуваагч болно. Хариултууд дотор байгаа боломжит хамгийн бага тоо тул ХБЕХ(12, 15, 21) = 420 байна.

Мөн

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 12 & 2 & 15 & 3 & 21 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & & 1 & \\ 1 & & & & & \end{array}$$

болохыг ашиглан

$$\text{ХБЕХ}(12, 15, 21) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 420$$

гэж бодож болно.

1.7. $\begin{cases} 14 = a^2 + 5b^2 \\ -6 = -2ab \end{cases}$ байх байх a, b бүхэл тоонуудыг олно. Эндээс $5b^2 \leq 14$ тул зөвхөн $b = \pm 1$ байх боломжтой. Энэ үед $ab = 3$ тул $a = \mp 3$ байна. Иймд

$$(3 - \sqrt{5})^2 = 14 - 6\sqrt{5}, (-3 + \sqrt{5})^2 = 14 - 6\sqrt{5}$$

байна. $3 - \sqrt{5} > 0$ тул $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}$ байна. Иймд

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{5} = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3$$

1.8. $\sqrt{117^2 - 108^2} = \sqrt{(117 - 108)(117 + 108)} = \sqrt{9 \cdot 225} = 3 \cdot 15 = 45$

1.9. 1 нь $\frac{100\%}{51}$ тул 17 нь

$$\frac{100\%}{51} \cdot 17 = \frac{100\%}{3}.$$

1.10.

$$\begin{aligned} \sqrt{90} \times \sqrt{562.5} &= \sqrt{90 \times 562.5} = \sqrt{9 \times 562.5 \times 10} = \\ &= 3\sqrt{5625} = 3\sqrt{75^2} = 3 \cdot 75 = 225 \end{aligned}$$

1.11. $11.(15) = 11 + \frac{15}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots\right) = 11 + \frac{15}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 11 \frac{15}{99}$ тул рационал тоо болно.

$\sqrt{8}$ тоог $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ байх үл хураагдах бутархай хэлбэрээр бичиж болдог гэж үзье. Тэгвэл $\sqrt{8}n = m$ болно. Үүний хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлсний дараа $8n^2 = m^2$ тэнцэтгэлийн зүүн гар тал нь 8-д хуваагдах тул m нь 4-т хуваагдах ёстой. Өөрөөр хэлбэл $m = 4m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}$ гэж бичиж болно. Эндээс $8n^2 = 16m_1^2$ болох бөгөөд $n^2 = 2m_1^2$ болно. Одоо тэнцэтгэлийн баруун гар тал нь 2-т хуваагдах тул $n = 2n_1$, $n \in \mathbb{N}$ хэлбэртэй бичигдэнэ. Эндээс n, m нь хоёул 2-т хуваагдах болж зөрчил үүсэж байна. Иймд $\sqrt{8}$ тоог $\frac{m}{n}$ хэлбэртэй бичиж болохгүй тул иррационал тоо байна.

$\sqrt[3]{81}$ тоог өмнөхтэй яг адил аргаар $\frac{m}{n}$ хэлбэртэй бичиж болохгүйг харуулж болох тул иррационал тоо болно.

Мэдээж $\frac{7}{11}$ нь рационал тоо юм.

1.12. $-2 \leq -1.4 < -1$ тул $[-1.4] = -2$.

1.13. $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ ба $1 \leq 1\frac{2}{5} < 2$ тул $\left[\frac{7}{5}\right] = 1$. Иймд

$$\left\{\frac{7}{5}\right\} = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$$

1.14. $430000 = 4.3 \times 10^5$ тул В зөв хариулт болно.

1.15.

$$9A = 10A - A = 7.(7) - 0.(7) = 7 \Rightarrow A = 0.(7) = \frac{7}{9}$$

1.16.

$$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$$

байна.

Санамж:

$$1440 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 10$$

боловч 10 анхны тоо биш тул каноник задаргаа болж чадахгүй.

1.17.

$$a = 102_3 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 9 + 0 + 2 = 11$$

1.18. $x = 1.6$, $y = 1\frac{21}{45} = 1.4(6)$, $z = \frac{89}{60} = 1.48(3)$ тул $x > z > y$ байна.

1.19. $\frac{8}{9} > \frac{8}{10}$ нь үнэн тэнцэтгэл биш юм.

1.20. $5 + 4 + 4 + 1 + 2 + 8 = 24 = 3 \cdot 8$, $9 + 9 + 3 + 6 = 27 = 3 \cdot 9$ ба $28 = 4 \cdot 7$, $36 = 4 \cdot 9$ тул 544128, 9936 тоонууд 3 ба 4-т хуваагдана.

1.21. $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{3^3}{2^3} = -\frac{27}{8}$ тул тодорхойлолт ёсоор

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$$

байна.

1.22.

$$8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = 8^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

1.23. $(-7^2)^3 = (-1 \cdot 7^2)^3 = (-1)^3 \cdot 7^{2 \cdot 3} = -7^6$

1.24. Тодорхойлолт ашиглаад шууд бодъё. 54 нь 12-д хуваагдахгүй, 120 нь 9, 18, 27-д хуваагдахгүй тул эдгээрийн аль нь ч ерөнхий хуваагч биш. Иймд үлдэх ганц тоо 6 нь ХИЕХ болно.

Өгөгдсөн тоонуудын анхны тоон $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $54 = 2 \cdot 3^3$ задаргаанаас $(90, 54) = 2 \cdot 3 = 6$ гэж бодож болно.

1.25.

$$1. \ x = \frac{3 - \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6}} = \frac{(3 - \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})}{(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})} = \frac{15 - 6\sqrt{6}}{9 - 6} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

$$2. \ x + y = 5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} = 10$$

$$3. \ x \cdot y = (5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6}) = 25 - 24 = 1$$

$$4. \ \sqrt{x^3 + y^3 + 54} = \sqrt{(x + y)^3 - 3xy(x + y) + 54} = \sqrt{10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10 + 54} = \sqrt{1024} = 32.$$

2. Илтгэгч ба логарифм илэрхийлэл 1

2.1.

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

2.2.

$$2^x + 2^x + 2^x + 2^x = 4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2}$$

$$2.3. (-7^2)^3 = (-1 \cdot 7^2)^3 = (-1)^3 \cdot 7^{2 \cdot 3} = -7^6$$

2.4.

$$8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = 8^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

2.5.

$$\begin{aligned} (ab^2)^3 \cdot (a^3b^2)^4 &= a^3(b^2)^3 \cdot (a^3)^4(b^2)^4 = a^3b^{2 \cdot 3} \cdot a^{3 \cdot 4}b^{2 \cdot 4} \\ &= a^3b^6 \cdot a^{12}b^8 = a^{3+12}b^{6+8} = a^{15}b^{14} \end{aligned}$$

2.6.

$$9^{5p} \cdot 9^{-3p} = 9^{5p+(-3p)} = 9^{2p} = 9^{2 \cdot \frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

2.7.

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \log_3 27 = 3$$

2.8.

$$\log_{16} 8 = \log_{2^4} 2^3 = \frac{3}{4} \cdot \log_2 2 = \frac{3}{4}$$

Мөн 2 суурьт шилжүүлэн бодож болно. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ тул

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{3}{4}$$

2.9.

$$2^{x_0} = 3f(2) = 3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow x_0 = \log_2(3 \cdot 2^2) = \log_2 3 + \log_2 2^2 = 2 + \log_2 3$$

$$2.10. \log_{10} 4 + \log_{10} 25 = \log_{10}(4 \cdot 25) = \log_{10} 100 = 2 \text{ байна.}$$

2.11.

$$\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{4} = \log_2 \frac{6}{\frac{3}{4}} = \log_2 8 = 3$$

2.12.

$$\log_a(a\sqrt{a}) = \log_a a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

2.13.

$$\text{Илэрх.} = 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_{16} 625 \cdot \log_{25} 81$$

$$= 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_{2^4} 5^4 \cdot \log_{5^2} 9^2$$

$$= 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 9$$

$$= 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 9$$

$$= 3 \cdot \log_3 9 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\leftarrow \log_{a^k} b^k = \log_a b$$

$$\leftarrow \log_3 2 \cdot \log_2 5 = \log_3 5$$

$$\leftarrow \log_3 5 \cdot \log_5 9 = \log_3 9$$

байна.

2.14.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\log_2 \sqrt[3]{5}}{\log_2 5} - \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \log_3 4) \\
 &= \frac{\log_2 5^{\frac{1}{3}}}{\log_2 5} - \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 4) \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \log_2 5}{\log_2 5} - \log_{\frac{1}{4}} 2 \\
 &= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

2.15.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\log_5 375}{\log_{15} 5} - \frac{\log_5 3}{\log_{1875} 5} \\
 &= \log_5 375 \cdot \log_5 15 - \log_5 3 \cdot \log_5 1875 \\
 &= \log_5 (5^3 \cdot 3) \cdot \log_5 (5 \cdot 3) - \log_5 3 \cdot (5^4 \cdot 3) \\
 &= (3 + \log_5 3) \cdot (1 + \log_5 3) - \log_5 3 \cdot (4 + \log_5 3) \\
 &= 3 + 4\log_5 3 + \log_5^2 3 - 4\log_5 3 - \log_5^2 3 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

2.16.

$$8^{\frac{2}{3}} + \sqrt[5]{32} = (2^3)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[5]{2^5} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} + 2^{\frac{5}{5}} = 2^2 + 2 = 6$$

2.17.

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x}} = (x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{8}}$$

2.18.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \log_2 (\log_2 \sqrt[4]{2}) \\
 &= \log_2 (\log_2 (2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}) \\
 &= \log_2 (\log_2 2^{\frac{1}{8}}) \\
 &= \log_2 \frac{1}{8} = -3
 \end{aligned}$$

2.19.

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{2}} 16 &= -\log_2 16 = -4, \\
 \log_5 \frac{1}{25} &= \log_5 5^{-2} = -2, \\
 9^{\log_3 2} &= 3^{2\log_3 2} = 3^{\log_3 2^2} = 4
 \end{aligned}$$

тул

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2} = (-4) \cdot (-2) : 4 = 2$$

2.20.

$$\begin{aligned}
 \lg 6250 &= \lg(5^4 \cdot 10) \\
 &= 4\lg 5 + \lg 10 \\
 &= 4 \cdot 0.699 + 1 \\
 &= 3.796
 \end{aligned}$$

2.21. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ томъёог ашиглавал $3^{\lg 2} - 2^{\lg 3} = 3^{\lg 2} - 3^{\lg 2} = 0$.

2.22.

$$\begin{aligned}
 5^{\frac{1}{\log_7 5}} - \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27 &= 5^{\log_5 7} - \log_{3^{-\frac{1}{2}}} 3^3 = \\
 &= 7 - \frac{3}{-\frac{1}{2}} = 7 + 6 = 13
 \end{aligned}$$

2.23. $y = 0.5^x$ нь буурах функц тул аргументийн их утганд бага утга авна. $0.1 < \frac{1}{5} = 0.2 < 2 < 5$ тул $0.5^5 < 0.5^2 < 0.5^{\frac{1}{5}} < 0.5^{0.1}$ байна.

2.24.

$$\begin{aligned}
 a &= \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \\
 b &= \log_2 2^{-1} = -1 \\
 c &= \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

тул $b < a < c$ байна.

2.25.

$$2^x = 3^y = 12^z \Leftrightarrow \log 2^x = \log 3^y = \log 12^z \Leftrightarrow$$

$$x \log 2 = y \log 3 = z \log 12 = z(2 \log 2 + \log 3) = t$$

болно. Эндээс $\log 2 = \frac{t}{x}$, $\log 3 = \frac{t}{y}$ ба $xyz \neq 0$ тул

$$z \left(2 \cdot \frac{t}{x} + \frac{t}{y} \right) = t \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

байна.

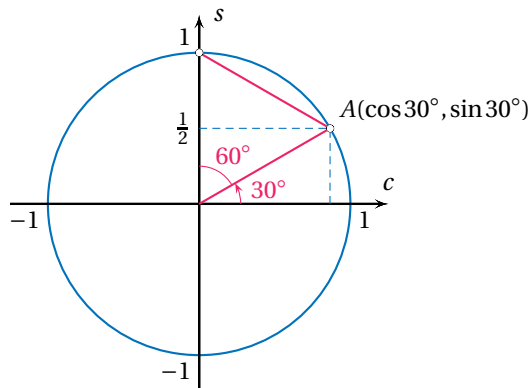
Жич: Энд $\log$ нь дурын суурьтай логарифм байж болно.

3. Тригонометр илэрхийлэл 1

$$3.1. \frac{55^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{11\pi}{36}.$$

$$3.2. \frac{\frac{\pi}{15}}{\pi} \times 180^\circ = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ.$$

3.3. Нэгж тойрог зурж 30° өнцгийг OX тэнхлэгээс цагийн зүүний эсрэг чиглэлд байгуулъя.



Өнцгийн тойргийг огтлох цэгийг A гэе. Тэгвэл $A(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$ болно. $(0, 0)$, $(0, 1)$, A нь нэг зөв гурвалжны оройн цэгүүд болох тул $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ болно. Иймд

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$$

байна.

3.4. $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тул

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

3.5. Эерэг бөгөөд $[-1; 1]$ мужид байх тоо нь зөвхөн 0.8 байна.

3.6.

$$\cos 510^\circ = \cos(510^\circ - 360^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.7.

$$\operatorname{tg}(-120^\circ) = \operatorname{tg}(-120^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

3.8.

$$\sin(\alpha - 30^\circ) = \cos(90^\circ - (\alpha - 30^\circ)) = \cos(120^\circ - \alpha)$$

$\alpha = 0$ тухайн тохиолдолд шалгаад бодож болно.

3.9.

$$\begin{aligned} m^2 &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Иймд $\sin 2\alpha = m^2 - 1$ байна

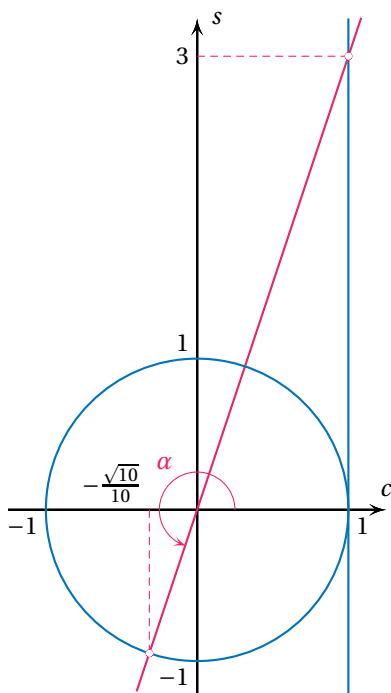
3.10.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{9}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{9}{7}$$

3.11. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ба $\cos \alpha < 0$ тул

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + 3^2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

байна.



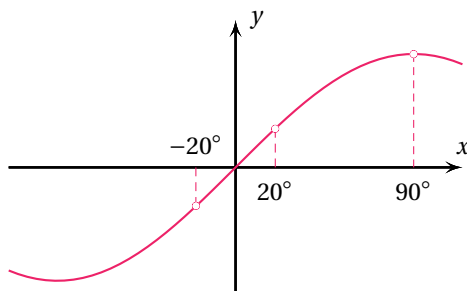
3.12.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} &= \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{\sin^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{(\sin^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha) : \cos^3 \alpha}{(\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha) : \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^3 \alpha + 1} = \frac{3^3 + 3}{3^3 + 1} = \frac{30}{28} = \frac{15}{14} \end{aligned}$$

3.13. $-20^\circ < 20^\circ < 90^\circ$ ба $y = \sin x$ функц нь $[-90^\circ, 90^\circ]$ мужид өсөх функц тул

$$\sin(-20^\circ) < \sin 20^\circ < \sin 90^\circ$$

байна.



3.14. $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ба

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

тул

$$\sin 30^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ < \cos 30^\circ$$

байна.

3.15.

$$\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ = \cos(75^\circ - 15^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

3.16.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

байна. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ тул $0 < \alpha + \beta < \pi$ байна. Иймд $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

3.17.

$$2 \cos^2 22.5^\circ - 1 = \cos(2 \cdot 22.5^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.18.

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 22.5^\circ \cdot \operatorname{tg} 22.5^\circ &= 2 \cos^2 22.5^\circ \cdot \frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ} = \\ &= 2 \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

3.19.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \cdot \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

3.20.

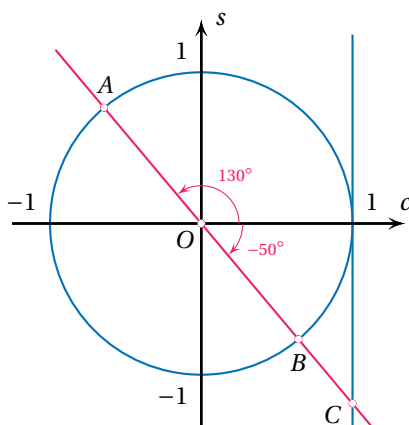
$$\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \{ \sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ) \}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

3.21.

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= \cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \\ &= (\cos 115^\circ + \cos 65^\circ) - (\cos 35^\circ - \cos 25^\circ) \\ &= 2 \cdot \cos \frac{115^\circ + 65^\circ}{2} \cdot \cos \frac{115^\circ - 65^\circ}{2} + 2 \cdot \sin \frac{35^\circ + 25^\circ}{2} \cdot \sin \frac{35^\circ - 25^\circ}{2} \\ &= 2 \cdot \cos 90^\circ \cdot \cos 25^\circ + 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 5^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 5^\circ = \sin 5^\circ \end{aligned}$$

3.22.



Зургаас харахад тангес нь $\text{tg } 130^\circ$ -тэй тэнцүү $] -90^\circ; 90^\circ [$ байх өнцөг нь -50° байна.

3.23. $\arccos(-0.5) = \alpha$ гэвэл $\cos \alpha = -0.5$ тул $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ байна. $\alpha \in [0; \pi]$ тул $k = 0$ буюу $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ байна.

3.24.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \cos 3\alpha}{10(\cos 9\alpha + \cos 3\alpha)} &= \frac{\sqrt{3} \cos 3\alpha}{10 \cdot 2 \cos 6\alpha \cos 3\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{20 \cdot \cos 6\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{20 \cdot \cos\left(6 \times \frac{\pi}{36}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{20 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

3.25.

$$\begin{aligned}
 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)) \cdot \sin 80^\circ \\
 &= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \sin 80^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \{ \sin(80^\circ - 20^\circ) + \sin(80^\circ + 20^\circ) \} - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin 100^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

4. Тоо тоолол сэдвийн давтлага 1

4.1. $10 = \underline{2} \cdot \underline{5}$, $45 = \underline{3^2} \cdot 5$, $33 = 3 \cdot \underline{11}$ тул

$$\text{ХБЕХ}(10, 45, 33) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 990$$

4.2. $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ хувьд $7 \cdot 2 = 14$ ба $7 + 2 = 9$ тул

$$\sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

болно. Иймд $A = 7$, $B = 2$ буюу $A + B = 9$ байна.4.3. $3 < \sqrt{11} < 4$ байна. Иймд $2 - 4 < 2 - \sqrt{11} < 2 - 3$ буюу $-2 < 2 - \sqrt{11} < -1$ тул -2 нь $2 - \sqrt{11}$ тооноос хэтрэхгүй хамгийн их бүхэл тоо байна. Иймд $[2 - \sqrt{11}] = -2$ байна.4.4. 45-ийн 12% нь $\frac{45 \cdot 12}{100}$ байна. Иймд

$$\frac{x \cdot 4.5}{100} = \frac{45 \cdot 12}{100} \Rightarrow x = \frac{45 \cdot 12}{4.5} = 120$$

байна.

4.5. $A = 2.0(15)$ гэвэл $100A = 201.5(15)$ болно. Иймд

$$99A = 100A - A = 201.5(15) - 2.0(15) = 199.5 \text{ буюу}$$

$$A = \frac{199.5}{99} = 2 + \frac{1.5}{99} = 2\frac{1}{66}$$

байна.

4.6.

$$78 = 64 + 8 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^0$$

тул

$$78 = 1001110_2$$

байна.

4.7. $x = 1\frac{2}{7} = 1\frac{24}{84}$, $y = 1\frac{11}{42} = 1\frac{22}{84}$, $z = \frac{37}{28} = 1\frac{9}{28} = 1\frac{27}{84}$ байна. Бүхэл хэсгүүд нь тэнцүү, бутархай хэсгүүдийн хуваарь нь тэнцүү тул хүртвэрүүдээр нь эрэмбэлбэл $z > x > y$ байна.

4.8.

$$0.2^{-4} \cdot 25^{-2} + 81^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{0.2^4 \cdot 5^4} + 3^{\frac{4}{3}} = 1 + 3^{\frac{4}{3}} > 1 + 3 = 4$$

болно. Иймд сүүлийн сонголт худал байна.

4.9.

$$9^{\frac{1}{3}} : 9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{5}{12}} = 9^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

4.10.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 4f(3) \Leftrightarrow 3^{x_0} = 4 \cdot 3^3 \\ \Leftrightarrow x_0 &= \log_3(2^2 \cdot 3^3) = \log_3 4 + \log_3 3^3 = 2\log_3 2 + 3 \end{aligned}$$

4.11.

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= \frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2} \\ &= \log_2 18 \cdot \log_2 36 - \log_2 9 \cdot \log_2 72 && \leftarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\ &= \log_2(2 \cdot 9) \cdot \log_2(2^2 \cdot 9) - \log_2 9 \cdot \log_2(2^3 \cdot 9) \\ &= (1 + \log_2 9) \cdot (2 + \log_2 9) - \log_2 9 \cdot (3 + \log_2 9) && \leftarrow \log_a bc = \log_a b + \log_a c \\ &= 2 + 3\log_2 9 + \log_2^2 9 - 3\log_2 9 - \log_2^2 9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

4.12. $\lg 5 = 1 - \lg 2 = 0.6990$ тул

$$\begin{aligned} \lg 1125 &= \lg(3^2 \cdot 5^3) = 2\lg 3 + 3\lg 5 \\ &= 2 \cdot 0.4771 + 3 \cdot 0.6990 \\ &= 3.0512 \end{aligned}$$

4.13.

$$2 \cdot 2^{\log_3 9} - 9^{\log_3 2} = 2 \cdot 2^{\log_3 9} - 2^{\log_3 9} = 2^{\log_3 9} = 2^2 = 4$$

4.14.

$$\begin{aligned} 3^{\frac{1}{\log_7 3}} - \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25} &= 3^{\log_3 7} - \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{-2} = \\ &= 7 - \frac{-2}{\frac{1}{2}} \cdot \log_5 5 = 7 - (-4) = 11 \end{aligned}$$

4.15. $y = a^x$ функц нь $0 < a < 1$ үед монотон буурах функц юм. $y = 0.2^x$ нь монотон буурах функц тул аргументийн их утганд бага утга авна. $0.2 < \frac{1}{4} = 0.25 < 2 < 8$ тул $0.2^8 < 0.2^2 < 0.2^{\frac{1}{4}} < 0.2^{0.2}$ байна.

4.16.

$$\begin{aligned} a &= \log_2 2^{-6} = -6 \\ b &= \log_4 2^3 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \\ c &= \log_8 2^4 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

тул $a < c < b$ байна.

4.17. Сөрөг бөгөөд абсолют утга нь 1-ээс хэтрэхгүй тоо нь зөвхөн $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ юм.

$$4.18. \frac{\sin 72^\circ + \sin 36^\circ}{1 + \cos 36^\circ + \cos 72^\circ} \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ (1 + 2 \cos 36^\circ)}{\cos 36^\circ (1 + 2 \cos 36^\circ)} \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ = \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ = 1.$$

$$4.19. \cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \text{ ба } \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta \text{ тул}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = 1$$

4.20.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{144}{169}$$

ба $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ тул $\cos \alpha < 0$ байна. Иймд $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$ байна.

4.21. Тангесийн тодорхойлолт ёсоор $\operatorname{tg} \angle BAH = \frac{BH}{AH} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \angle CAH = \frac{CH}{AH} = \frac{3}{4}$ байна.
 $\angle BAC = \angle BAH + \angle CAH$ тул

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4+6}{8-3} = 2$$

байна.

Санамж: Хэрвээ нийлбэрийн томъёог мэдэхгүй эсвэл санахгүй байгаа бол бодлогын зургийг өгөгдсөн хэмжээний дагуу зураад тангесийн утгыг тодорхойлолтын дагуу олж болно. Хэдийгээр бага зэргийн хэмжилтийн алдаа гарч болох боловч өгөгдсөн хариунууд дотор ойролцоо утгууд байхгүй тул зөв хариултыг олох боломжтой.

4.22.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ - \sin 15^\circ &= 2 \cdot \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \\ &= 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

4.23.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} &= \frac{4\left(\frac{1}{2} \cdot \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 10^\circ\right)}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \\ &= \frac{4(\cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 10^\circ)}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4 \cos(60^\circ + 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = 4 \end{aligned}$$

4.24. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ба $-\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ тул $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ байна. Иймд

$$\sin(\arctg(-\sqrt{3})) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.25.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\cos 93^\circ \operatorname{tg} 267^\circ + \sin 87^\circ}{0.1} + 16 \sin^4 15^\circ \cdot \cos^4 15^\circ \\
 &= \frac{-\cos 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ + \sin 87^\circ}{0.1} + (2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ)^4 \\
 &= \frac{-\cos 87^\circ \cdot \frac{\sin 87^\circ}{\cos 87^\circ} + \sin 87^\circ}{0.1} + \sin^4 30^\circ \\
 &= \frac{-\sin 87^\circ + \sin 87^\circ}{0.1} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
 &= 0 + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

5. Алгебрийн илэрхийлэл 1

5.1. $b = 2$ гээд нийлбэрийн квадратын томьёог ашиглавал

$$(a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$$

5.2.

$$\frac{b^2 - 9}{b - 3} = \frac{b^2 - 3^2}{b - 3} = \frac{(b-3)(b+3)}{b-3} = b+3$$

5.3.

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x-4)^2$$

5.4.

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Бусдыг нь шалгаад тэнцэхгүй болохыг нь харуулаарай.

5.5.

$$\begin{aligned}
 25x^2 - 1 &= (5x)^2 - 1^2 = (5x-1)(5x+1) \\
 125x^3 + 1 &= (5x)^3 + 1^3 = (5x+1)((5x)^2 - 5x \cdot 1 + 1^2) = \\
 &= (5x+1)(25x^2 - 5x + 1)
 \end{aligned}$$

тул

$$\frac{(25x^2 - 5x + 1)(25x^2 - 1)}{125x^3 + 1} = \frac{(25x^2 - 5x + 1)(5x-1)(5x+1)}{(5x+1)(25x^2 - 5x + 1)} = 5x - 1$$

5.6.

$$\frac{y^2x + 2y^2}{x^2y + 3xy + 2y} = \frac{y^2(x+2)}{y(x^2 + 3x + 2)} = \frac{y^2(x+2)}{y(x+1)(x+2)} = \frac{y}{x+1}$$

5.7.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 10x + 24 &= x^2 - (4+6)x + 4 \cdot 6 \\
 &= (x^2 - 4x) - 6x + 4 \cdot 6 \\
 &= x(x-4) - 6(x-4) \\
 &= (x-4)(x-6)
 \end{aligned}$$

5.8.

$$\frac{12x^5y^2}{8x^2y^4} \div \frac{3y^3}{x^2} = \frac{3x^3}{2y^2} \cdot \frac{x^2}{3y^3} = \frac{x^5}{2y^5}$$

5.9. $(x+3)(2x-3) = (x-3)(x+3) \Leftrightarrow (x+3)(2x-3-x+3) = 3x(x+3) = 0$ тул $x_1 = 0$, $x_2 = -3$.5.10. $x_1 = 1$ шийд болохыг шалгаад Виетийн теорем ашиглан $x_2 = \sqrt{2}$ гэж бодох боломжтой. Тэгшитгэлийн хялбар шийдийг тааж олох нь хугацаа хэмнэх боломж олгодог юм.

Түүнчлэн

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+1 \pm |\sqrt{2}-1|}{2} = \frac{\sqrt{2}+1 \pm (\sqrt{2}-1)}{2} \end{aligned}$$

гээд квадрат тэгшитгэл бодох томъёо ашиглаад бодсон ч болно. Энэ тохиолдолд

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1}{2} = 1, x_2 = \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2}.$$

5.11.

$$y = -x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9$$

тул оройн цэгийн координат нь (2,9) байна.

5.12. Үржигдэхүүн тус бүр эерэг байхын тулд $x > 5$, үржигдэхүүн тус бүр сөрөг байхын тулд $x < -4$ байна. Иймд шийд нь $x < -4 \cup x > 5$.

5.13.

$$\begin{aligned} OG &= (3x^2 - 4)^2 - 9x(x^3 + 3x) + (x-3)(2x+5) \\ &= 9x^4 - 24x^2 + 16 - 9x^4 - 27x^2 + 2x^2 - x - 15 \\ &= -49x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

буюу ахлах гишүүн нь $-49x^2$ тул зэрэг нь 2 байна.

5.14. $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1)^{30} = 6^{30}.$

5.15. $x+2 = x - (-2)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь 0 тул Безугийн теоремоор

$$R = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + p \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 12 = 0$$

байна. Имд $4p = -4 \Rightarrow p = -1$ байна.

5.16. Безугийн теорем ёсоор

$$R = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 1 = -6$$

байна.

5.17. $2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$ тул

$$4 \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 2 \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = 0 \cdot Q \left(-\frac{3}{2}\right) + R \Rightarrow$$

$$R = -\frac{27}{2} + \frac{9}{2} - 6 - 5 = -20$$

байна.

5.18.

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 5xy = 20 \Rightarrow xy = 4$$

5.19. $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-3} = 2+\sqrt{3}$. Иймд $2-\sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} + 2+\sqrt{3} = 4$.

5.20. $a = bk$ гэвэл

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = b^2(k^2 - 3k + 2) = b^2(k-1)(k-2)$$

$$2b^2 + ab - a^2 = -b^2(k^2 - k - 2) = -b^2(k+1)(k-2)$$

тул $a^2 - 3ab + 2b^2 = (a-b)(a-2b)$, $2b^2 + ab - a^2 = -(a+b)(a-2b)$ болно. Иймд

$$\frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{2b^2 + ab - a^2} = \frac{(a-b)(a-2b)}{-(a+b)(a-2b)} = \frac{b-a}{b+a}$$

5.21. $(ax+b)(x+1) = ax^2 + (a+b)x + b = 3x^2 + x - 2$ тул $a = 3$, $b = -2$ байна. Иймд $3x-2$ нь зөв хариулт юм.

5.22. $a = s^6$, $b = t^3$ гэвэл

$$\begin{aligned} \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}} + b\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b} &= \frac{(s^2t + st^2 + t^3)(s-t)}{s^3 - t^3} = \\ &= \frac{t(s^2 + st + t^2)(s-t)}{(s-t)(s^2 + st + t^2)} = t = b^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

5.23.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x\sqrt{x}-1} &= 1 + \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}} \cdot \frac{x\sqrt{x}-1}{1} \\ &= 1 + \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1} \\ &= 1 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = 1+x-1 = x \end{aligned}$$

5.24. $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = k$ гэвэл $a = 3k$, $b = 2k$ байна. Иймд

$$\frac{3a-b}{a+b} = \frac{3 \cdot (3k) - 2k}{3k + 2k} = \frac{7k}{5k} = \frac{7}{5}$$

5.25. $\alpha^2 + \alpha = 1$ тул

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + 9 \\
 &= \alpha^6(\alpha^2 + \alpha) + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + 9 \\
 &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + 9 \\
 &= \alpha^4(\alpha^2 + \alpha) + \alpha^3 + \alpha + 9 \\
 &= \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + 9 \\
 &= \alpha^2(\alpha^2 + \alpha) + \alpha + 9 \\
 &= \alpha^2 + \alpha + 9 = 1 + 9 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

6. Алгебрийн тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 1

6.1. $14x + 2 = 2(7x) + 2 = 2 \cdot \frac{3}{5} + 2 = 3\frac{1}{5}.$

6.2. $-5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} = -0.2$

6.3.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

тул $x_1 = \frac{-2+8}{2} = 3, x_2 = \frac{-2-8}{2} = -5$ байна.

6.4. Виетийн теоремоор $x_1 + x_2 = -1 + x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$ болно.

6.5. $a = 1, b = 2\sqrt{2}, c = -k$ тул

$$D = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) < 0 \Leftrightarrow 8 + 4k < 0 \Leftrightarrow k < -2$$

6.6.

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x+3)x^2 - 4(x+3) = (x+3)(x^2 - 4) = 0$$

гэж үржигдэхүүнд задалж бодвол $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -2$ тул

$$\frac{1}{-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{-2} = -\frac{1}{3}$$

байна.

Мөн куб тэгшитгэлийн хувь дахь Виетийн теорем ашиглаад

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{-4}{-(-12)} = -\frac{1}{3}$$

гэж шууд бодож болно.

6.7.

$$\sqrt{7 + \sqrt{6 - \sqrt{4}}} = \sqrt{7 + \sqrt{6 - 2}} = \sqrt{7 + \sqrt{4}} = \sqrt{7 + 2} = 3$$

тул $\sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow x-3 = 4^2 \Rightarrow x = 19$. $x = 19$ үед тэгшитгэлийн зүүн гар тал утгатай буюу $x = 19$ нь тодорхойлогдох мужид орох тул шийд болно.

6.8.

$$\sqrt[3]{x^3 - 61} = 4 \Leftrightarrow x^3 - 61 = 4^3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5$$

6.9. $x = 0$ нь $\sqrt{6} < 2\sqrt{3}$ тул шийд болно. Иймд С, D зөв хариулт болохгүй. $x = -4$ бол $2x + 6 = -2$ болох тул тодорхойлогдох мужид орохгүй. Иймд А зөв хариулт биш. $x = 3$ үед $\sqrt{3 \cdot 3 + 4} \neq 3 - 2$ шийд болохгүй. Иймд Е зөв байх боломжгүй. Иймд зөв хариулт нь В.6.10. Хэрэв $x + 2 = 0$ бол $(x^2 - 9)\sqrt{x + 2} = 0 \geq 0$ тул $x = -2$ нь шийд болно.Хэрэв $x + 2 > 0$ бол $x^2 - 9 \geq 0$ байх ёстой. Энэ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ болох ба үүнийг $x > -2$ тэй огтолцуулбал $x \in [3, +\infty)$ болно.Иймд $[-6, 6]$ завсар дахь бүхэл шийдүүд нь $-2, 3, 4, 5, 6$ болно.6.11. $t = \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}$ гэвэл

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

тул $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1$ болно. Эндээс

$$\frac{5-x}{x+3} = 1 \Rightarrow x = 1$$

ба шийд болохыг нь хялбархан шалгаж болно.

6.12. $x = 0$ үед $\sqrt{0+4} = 2 \neq 0 - 2 = -2$ тул А ба В хариулт буруу. $x = -1$ үед $\sqrt{3 \cdot (-1) + 4} = 1 \neq -1 - 2 = -3$ тул Е хариулт буруу. $x = 15$ үед $\sqrt{3 \cdot 15 + 4} = 7 \neq 7 - 2 = 5$ тул С хариулт буруу байна. Иймд үлдсэн D хариулт зөв хариулт байна.6.13. $|x - 2|$ гэсэн модулийн тэмдэг агуулсан илэрхийллийн доторхи илэрхийлэл $x - 2$ -ийн сөрөг биш байх муж нь $x - 2 \geq 0$, сөрөг байх муж нь $x - 2 < 0$ тул $]-\infty; 2[$ ба $[2; +\infty[$ мужуудад тэнцэтгэл бишийг бодъё:1. $x - 2 \geq 0$ буюу $x \geq 0$ үед $|x - 2| = x - 2$ тул

$$(x - 2)^2 - 6|x - 2| - 7 = (x - 2)^2 - 6(x - 2) - 7 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 10x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9$$

байна. $x \geq 2$ тул энэ тохиолдолд шийд нь $[2; 9]$ байна.2. $x - 2 < 0$ буюу $x < 0$ үед $|x - 2| = -(x - 2)$ тул

$$(x - 2)^2 - 6|x - 2| - 7 = (x - 2)^2 + 6(x - 2) - 7 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3$$

байна. $x < 2$ тул энэ тохиолдолд шийд нь $[-5; 2[$ байна.

Одоо шийдүүдээ нэгтгэвэл $[-5; 2] \cup [2; 9] = [-5; 9]$ байна.

6.14. Тэгшитгэлийн тодорхойлогдох муж нь $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ байна.

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x - 1} = \frac{1 - 3x}{x - 1} \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 1 - 3x$$

болох ба эндээс

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

болно. Гэвч $x = 1$ нь тодорхойлогдох мужид орохгүй тул тэгшитгэл шийдгүй байна.

6.15. $t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$ тул $t_1 = -1$, $t_2 = -3$ болно. Эндээс $\frac{x^2 + x - 5}{x} = -1$ эсвэл $\frac{x^2 + x - 5}{x} = -3$ байна.

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$$

үед $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$ шийд гарна.

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

үед $x_{3,4} = 1, -5$ гэсэн шийдтэй. Шийдүүдээ нэгтгэвэл

$$-5; 1; -1 \pm \sqrt{6}$$

болно.

6.16. $0 < x$ үед $\frac{1}{x} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow x < 5$ болох ба $x \leq 0$ байх шийдгүй тул тэнцэтгэл бишийн шийд $x \in (0; 5)$ байна.

6.17. $-2(x + 5) < -4 = -2 \cdot 2$ ба $-2 < 0$ тул $x + 5 > 2$ буюу $x > -3$.

6.18.

$$|4x + 2| = 6 \Leftrightarrow 4x + 2 = \pm 6$$

буюу

$$x_1 = \frac{6 - 2}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-6 - 2}{4} = -2.$$

Иймд $x_1 \cdot x_2 = -2$.

6.19.

$$|1 - x| \leq 3 \Leftrightarrow |x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3$$

тул $-2 \leq x \leq 4$ буюу $x \in [-2; 4]$ байна.

$$\text{6.20. } \frac{2m - 8mn + 2n}{m + 2mn + n} = \frac{2(m + n) - 8mn}{(m + n) + 2mn} = \frac{2mn - 8mn}{mn + 2mn} = \frac{-6mn}{3mn} = -2.$$

6.21. $x = -2$, $y = 1$ үед $3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1$ ба $-2 + 2 \times 1 = 0$ тул шийд болж байна.

6.22. $\begin{cases} 2x - y = m \\ kx + 2y = 6 \end{cases}$ систем төсгөлгүй олон шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\frac{2}{k} = \frac{-1}{2} = \frac{m}{6}$$

тул $k = -4$, $m = -3$ байна. Иймд $m - k = -3 - (-4) = 1$ байна.

6.23. Тэгшитгэл шийдгүй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\frac{3}{7} = \frac{3}{b} \neq \frac{5}{7}$$

тул $b = 7$ байна.

6.24.

$$(x-2)(x-4)(x-6)(x-8) = \{(x-2)(x-8)\} \times \{(x-4)(x-6)\}$$

$$= (x^2 - 10x + 16)(x^2 - 10x + 24) = 105$$

болно. $t = x^2 - 10x + 16$ гэвэл $t(t+8) = 105$ буюу $t^2 + 8t - 105 = 0$ болно. Иймд

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 105}}{2} = \frac{-8 \pm 22}{2}$$

тул $t_1 = 7$, $t_2 = -15$ болно.

$$x^2 - 10x + 16 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

тэгшитгэлийн шийдүүд нь $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$ буюу $x_1 = 1$, $x_2 = 9$ байна.

Харин

$$x^2 - 10x + 16 = -15 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 31 = 0$$

тэгшитгэл нь $D = 10^2 - 4 \cdot 31 < 0$ тул шийдгүй.

6.25.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 - 8x + 12} \\ &= \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x-6)} \\ &= \frac{x-6}{(x-6)(x-2)(x+2)} + \frac{x+2}{(x-6)(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{2x-4}{(x-6)(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

тул $(x-6)(x^2-4) = 2x-4$ гэж гарах ба гишүүнчлэн үржүүлж задлаад төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэж бичвэл

$$x^3 - 6x^2 - 6x + 28 = 0$$

болно.

$$x^3 - 6x^2 - 6x + 28 = (x-2)(x^2 - 4x - 14) = 0$$

тэгшитгэлийн шийдүүд нь $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{18}$ ба $x_1 = 2$ нь тодорхойлогдох мужид орохгүй.

7. Илтгэгч, логарифм, тригонометр тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 1

7.1.

$$2^x = 32 = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$$

$$7.2. 2^x \leq 8 = 2^3 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$$7.3. 0 < 0.5 < 1 \text{ тул}$$

$$0.5^{2x} < 0.5^{1-x} \Leftrightarrow 2x > 1 - x \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

байна.

$$7.4. t = 5^x \text{ гэвэл } t^2 = (5^x)^2 = 25^x \text{ тул}$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

тул

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

байна. Эндээс $t_1 = 5$ үед $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$, $t_2 = 1$ үед $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$ гэсэн шийдүүдтэй.

7.5.

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 = 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x$$

$$t = \left(\frac{4}{9}\right)^x \text{ гэвэл } 3t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{2}{3} \text{ болно. Иймд } x_1 = \log_{\frac{4}{9}} 1 = 0, x_2 = \log_{\frac{4}{9}} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

байна. Иймд шийдүүдийн нийлбэр нь $0 + \frac{1}{2} = 0.5$ байна.

$$7.6. \log_2(x-1) = 3 \Rightarrow x-1 = 2^3 \Rightarrow x = 9 \text{ байна.}$$

7.7. Логарифм функцийн аргумент эерэг тул $x-2 > 0, x+4 > 0 \Rightarrow x > 2$ тул $D =]2; +\infty[$ байна. Логарифмийн суурь 1-ээс бага тул

$$2 \log_{0.5}(x-2) < \log_{0.5}(x+4) \Leftrightarrow \log_{0.5}(x-2)^2 < \log_{0.5}(x+4) \Leftrightarrow (x-2)^2 > x+4.$$

Эндээс $x^2 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \cup 5 < x$. Тодорхойлогдох мужаа тооцвол тэнцэтгэл бишийн шийд $5 < x$ байна.

$$7.8. t = \log_{0.3} x \text{ гэвэл}$$

$$\frac{4t+1}{t+1} \leq t+1 \Leftrightarrow \frac{4t+1-t^2-2t-1}{t+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t(2-t)}{t+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-2)}{t+1} \geq 0$$

тул

$$t \in]-1; 0] \cup [2; +\infty[$$

болно.

$$-1 < \log_{0.3} x \leq 0 \Leftrightarrow 0.3^{-1} > x \geq 0.3^0 \Leftrightarrow \frac{10}{3} > x \geq 1$$

ба

$$2 \leq \log_{0.3} x < +\infty \Leftrightarrow 0.3^2 \geq x > 0.3^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0.3^x = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{100} \geq x > 0$$

тул тэнцэтгэл бишийн шийд $\left(0; \frac{9}{100}\right] \cup \left[1; \frac{10}{3}\right)$ байна.

7.9.

$$\sqrt{x^2 - 9} \cdot \lg(1 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} = 0 \\ \lg(1 - x) = 0 \end{cases}$$

Эхний тэгшитгэлээс $x = \pm 3$ гурав шийд гарах боловч $x = 3$ үед $\lg(1 - 3) = \lg(-2)$ тодорхойлогдохгүй тул шийд биш. Хоёр дахь тэгшитгэлээс

$$\lg(1 - x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 10^0 \Rightarrow x = 0$$

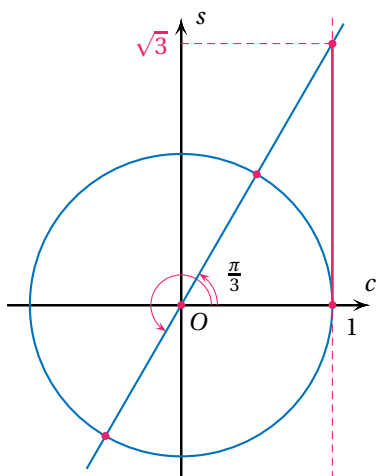
гэж гарах боловч $\sqrt{0^2 - 9}$ тодорхойлогдохгүй тул шийд болж чадахгүй. Иймд зөвхөн $x = -3$ гэсэн шийдтэй.

7.10. $x = 2^{-1} = 0.5$ үед $\log_2 0.5 = -1$ ба $\frac{1}{-1-4} = -0.2 > \frac{1}{-1} = -1$ тул шийд болно. Иймд эхний хоёр хариулт зөв байх боломжгүй.

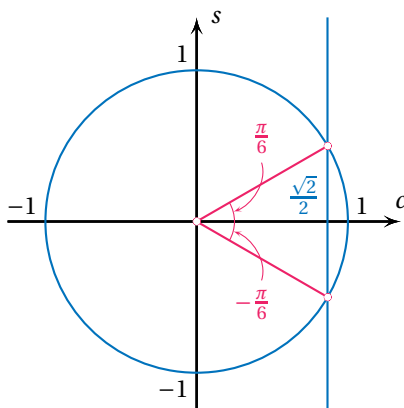
$x = 2^2 = 4$ үед $\log_2 4 = 2$ ба $\frac{1}{2-4} = -0.5 < \frac{1}{2} = 0.5$ тул шийд болохгүй. Иймд $]0; +\infty[$ хариулт биш.

$x = 2^5 = 32$ үед $\log_2 32 = 5$ ба $\frac{1}{5-4} = 1 > \frac{1}{5}$ тул шийд болно. Иймд зөв хариулт нь зөвхөн $]0; 1[\cup]16; +\infty[$ байх боломжтой.

7.11. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ба $\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ тул $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ байна. Иймд $x - 2\pi = \frac{\pi}{3} + \pi \ell \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.



7.12.



$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ иймд тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ байна.

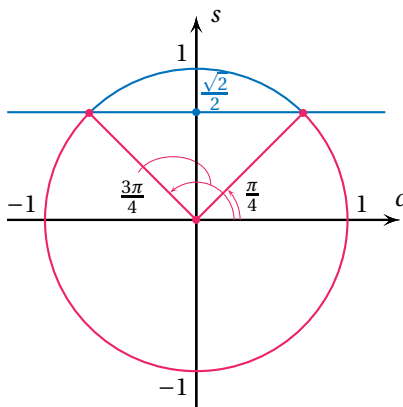
7.13. $\sin x < \frac{4}{5}$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$-\arcsin \frac{4}{5} + (2k+1)\pi < x < \arcsin \frac{4}{5} + (2k+2)\pi$$

$\arcsin \frac{4}{5} = \arccos \frac{3}{5}$ байдаг. Ийм $0 \leq x < 2\pi$ байх шийдүүд нь

$0 \leq x < \arccos \frac{3}{5} \cup \pi - \arccos \frac{3}{5} \leq x < 2\pi$ байна.

7.14.



$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

тул

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi + 2\pi k < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow -\frac{11\pi}{12} + 2\pi k < 2x < \frac{7\pi}{12} + 2\pi k \Leftrightarrow$$

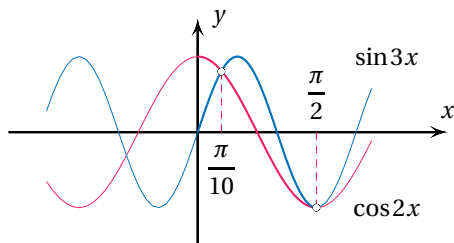
$$-\frac{11\pi}{24} + \pi k < x < \frac{7\pi}{24} + \pi k$$

тул $x \in \left[k\pi - \frac{11\pi}{24}; \frac{7\pi}{24} + k\pi \right]$ байна.

7.15. $c = \cos^2 x$ гэвэл $2c^2 - 3c + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1$ болно. $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$,
 $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$ тул хамгийн их сөрөг шийд нь $-\frac{\pi}{3}$, хамгийн бага эерэг шийд нь $\frac{\pi}{3}$.
 Иймд ялгавар нь

$$-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

7.16.



Тэгшитгэлийн шийдийн тоо нь графикийн огтлолцлын цэгийн тоотой тэнцүү тул 2 байна.

7.17.

$$\cos^2(90^\circ + x) + 3\cos^2(180^\circ + x) = 2 \Leftrightarrow (\sin x)^2 + 3(-\cos x)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3\cos^2 x = 2 \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) + 3\cos^2 x = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

болно. Энэ тэгшитгэлийг $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ гээд үргэлжлүүлэн бодож болох боловч

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ зэрэг бууруулах томъёо ашиглан бодох нь илүү тохиромжтой байдаг.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

Эндээс $2x = 90^\circ + 180^\circ \cdot k \Leftrightarrow x = 45^\circ + 90^\circ \cdot k$ болно. Иймд $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$ байх шийд нь $k = 1$ үед $x = 135^\circ$ байна.

7.18.

$$\sin^2 x < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos 2x$$

ба $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ тул

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$$

7.19. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = 2\pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi n$ бүгдээрээ шийд болохыг шалгахад төвөгтэй биш.

Үүнийг $t = \cos x - \sin x$ гээд $\sin 2x = 1 - t^2$ болохыг ашиглан $t^2 = t$ тэгшитгэлд шилжүүлж бодож болно.

7.20.

$$\sin 2x + \sin 6x = 2 \sin \frac{2x+6x}{2} \cos \frac{6x-2x}{2} = 2 \sin 4x \cos 2x = \cos 2x$$

буюу

$$\cos 2x(2 \sin 4x - 1) = 0$$

ба $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ үед $2x \in [0; \pi]$, $4x \in [0; 2\pi]$ тул

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \\ 4x = \frac{6}{5}\pi \\ 4x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{24}{5\pi} \\ x = \frac{24}{24} \end{cases}$$

гэсэн 3 ялгаатай шийдтэй.

7.21. $\sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sqrt{3} \sin x \cos x \Rightarrow \sin x(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$ болно. Эндээс

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \end{cases}$$

 $\cos x \neq 0$ болохыг анхаарвал $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{cases}$ болох тул

$$\begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

тул $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \pi$ шийдүүд $[0; \pi]$ завсарт харъяалагдна. Эдгээрийн нийлбэр $\frac{4\pi}{3}$ байна.

7.22.

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) < 0$$

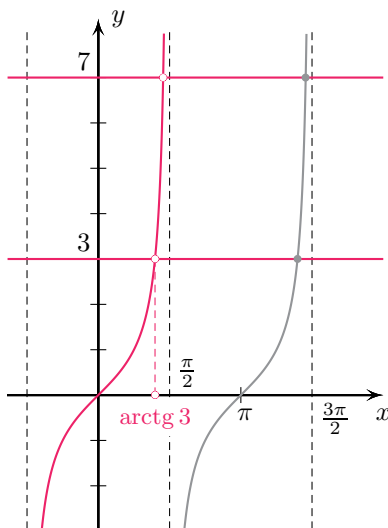
тул

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$$

болно. Эндээс $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$ болно.7.23. $\sin^2 x + 21 \cos^2 x = 5 \sin 2x = 10 \sin x \cos x$ болно. $\cos x = 0$ бол $\sin x^2 = 0$ буюу $\sin x = 0$ болоход хүрнэ. Иймд $\cos x \neq 0$ байна. Тэгшитгэлийн хоёр талыг $\cos^2 x$ -д хуваавал

$$\operatorname{tg}^2 x - 10 \operatorname{tg} x + 21 = 0$$

болно. Иймд $\operatorname{tg} x = 3$ юмуу $\operatorname{tg} x = 7$ байна. Эндээс хамгийн бага эерэг шийд нь $x = \operatorname{arctg} 3$ байна.



7.24.

$$5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}) \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{x-1} - 27 \cdot 3^{x-2} > 2 \cdot 5^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2}$$

тул

$$3 \cdot 5^{x-1} > 25 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow 5^{x-2} > 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > 1$$

байна. Иймд $x - 2 > 0$ буюу $x > 2$ байна.

7.25.

$$1. \cos 2\pi x - \sqrt{3} \sin 2\pi x = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cos(2\pi x + \operatorname{arctg} \sqrt{3}) = 2 \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2. y = 2 \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ функцийн үндсэн үе нь } \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ байна.}$$

$$3. 2 \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) > 1 \Leftrightarrow \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \text{ тэнцэтгэл бишийг бодвол}$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2\pi x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2\pi x < 2\pi n$$

тул

$$\frac{1}{3} + n < x < n \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3} + n; n\right)$$

байна.

8. Дараалал, Нийлбэр, Функци, Өгүүлбэртэй бодлого 1

8.1.

$$f(2) = \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

8.2. $\cos(-x) + (-x)^2 = \cos x + x^2$ тул тэгш функц байна.

8.3. Тодорхойлогдох муж нь

$$D: \begin{cases} \frac{x-4}{x^2-4} \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases}$$

$x = 0$, $x = 5$ тоонууд тодорхойлогдох мужид орох тул зөв хариулт нь $(-2; 2) \cup [4; +\infty)$ байна.

8.4. $n!$ дарааллын эхний гишүүд нь $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 2! \cdot 3 = 6$, $4! = 3! \cdot 4 = 24$, $5! = 4! \cdot 5 = 120$ тул өгөгдсөн дарааллын ерөнхий гишүүн болж чадна.

8.5. $d = \frac{a_{12} - a_8}{12 - 8} = \frac{25 - 17}{4} = 2$ тул

$$a_n = a_8 + (n - 8) \cdot 2 = 17 + 2n - 16 = 2n + 1$$

8.6. $1001 + 5(n - 1) = 9996 \Rightarrow n = \frac{9996 - 1001}{5} + 1 = 1800$.

8.7. $b_{10} = b_{2+8} = b_2 \cdot q^8$ тул $45 = 5 \cdot q^8 \Rightarrow q^8 = 9$ ба $q^4 > 0$ тул $q^4 = 3$ болно. Иймд

$$b_6 = b_2 \cdot q^4 = 5 \cdot 3 = 15$$

8.8. $2^x, 2^{3x+2}, 2^{6x-8}$ геометр прогрессийн дараалсан гишүүд тул

$$(2^{3x+2})^2 = 2^x \cdot 2^{6x-8} \Leftrightarrow 2(3x+2) = x + 6x - 8 \Leftrightarrow x = 12$$

8.9. 2, 10, 18 нь нийлбэр нь 30 бөгөөд 8 ялгавартай арифметик прогресс үүсгэнэ. Мөн 2, 6, 18 нь 3 хуваарьтай геометр прогрессийн дараалсан 3 гишүүн болох тул зөв хариулт болж байна.

8.10. $d = 4 - 1.5 = 2.5$ тул $a_n = a_4 + (n - 4) \cdot 2.5 = 1.5 + 2.5n - 10 = 2.5n - 8.5$ байна. Мөн

$$a_6 + a_{14} = a_7 + a_{13} = a_8 + a_{12} = a_9 + a_{11} = 2a_{10}$$

ба $a_{10} = 2.5 \cdot 10 - 8.5 = 16.5$ тул

$$\sum_{n=6}^{14} a_n = a_6 + a_7 + \dots + a_{14} = 9a_{10} = 9 \cdot 16.5 = 148.5$$

8.11. $b_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$ ба $q = 2$ тул

$$S_{10} = \frac{6 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 6 \cdot 1023 = 6138$$

8.12. Ердөө л 7 ширхэг тооны нийлбэр тул

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$$

гээд шууд тооцож болно. Ерөнхий тохиолдолд

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

томъёог ашиглан бодно.

8.13.

$$\begin{aligned}\text{Нийлбэр} &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{31 \cdot 33} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{33} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{33} \right) = \frac{49}{33}\end{aligned}$$

8.14.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot 101} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{100} \right) - \frac{1}{101} = \\ &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}\end{aligned}$$

байна.

8.15.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{10} (2k^2 - 4k + 7) - \sum_{k=1}^{10} (2k^2 - 10k + 1) = \\ &= \sum_{k=1}^{10} [(2k^2 - 4k + 7) - (2k^2 - 10k + 1)] = \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6k + 6) = (6 \cdot 1 + 6) + (6 \cdot 2 + 6) + \cdots + (6 \cdot 10 + 6) = \\ &= 6(1 + 2 + \cdots + 10) + 6 \cdot 10 = 6 \cdot 55 + 6 \cdot 10 = 6 \cdot 65 = 390\end{aligned}$$

Тайлбар: Нийлбэрийн тэмдэглэгээ, нийлбэрийн тэмдэглэгээний чанаруудыг мэдэхгүйгээс болж хялбар бодлого дээр оноо алдах явдал нийлээд ажиглагддаг.

$$8.16. \sum_{m=1}^2 \sum_{n=2}^4 (mn) = \sum_{m=1}^2 (m \sum_{n=2}^4 n) = \sum_{m=1}^2 m(2+3+4) = 9 \sum_{m=1}^2 m = 9 \cdot (1+2) = 27.$$

8.17. Олох тоог $\overline{xy}$ гэе. Тэгвэл $x + y = 12$, $x = 3y$ байна. Иймд $3y + y = 12 \Rightarrow y = 3$, $x = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow \overline{xy} = 93$.

8.18. 3 дахь өдөр үлдсэн хуудасны $\frac{1}{4}$ хэсэг үлдсэн байсан тул 2 дахь өдөр $4 \cdot 16 = 64$ хуудас үлдсэн байжээ. Эхний өдөр 36%-ийг уншсан тул 2 дахь өдөр нь $100\% - 36\% = 64\%$ үлдсэн байгаа. Иймд 64% нь 64 хуудас буюу 1% нь 1 хуудас болно. Эндээс 100% нь 100 хуудас байна.

$$8.19. \text{Нэг алимны үнэ } \frac{3.25\$}{5} = 0.65\$. \text{ Жүржийн үнэ } 1.05\$ - 0.65\$ = 0.40\$.$$

8.20. Шинээр нэмэгдсэн хэсэг нь $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10}{15} - \frac{6}{15} = \frac{4}{15}$. Энэ нь 36 л тул $\frac{1}{15}$ хэсэг нь $\frac{36}{4} = 9$ л болно. Иймд савны эзлэхүүн $9 \cdot 15 = 135$ л байна.

8.21. Сурагч өдөрт k хуудас, нийт n өдөрт номоо уншиж дуусгасан гэвэл

$$nk = (n - 5)(k + 16) \Rightarrow 16n - 5k = 80. \text{ Эндээс } k = \frac{16n - 80}{5} \text{ тул}$$

$$n \cdot \frac{16n - 80}{5} = 480 \Rightarrow n^2 - 5n - 150 = 0$$

болно. Иймд

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 25}{2}$$

Эндээс $n = 15$ гэсэн эерэг шийд нь бодлогын хариу болно.

8.22. 2-р ажилчин 1-р ажилчнаас k дахин хурдан гэвэл $1 + k = 3 \Rightarrow k = 2$ байна. Иймд 2-р ажилчин дангаараа $\frac{18}{2} = 9$ цагт хийж дуусгана.

8.23.

$$\begin{aligned} v &= \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{S}{150} + \frac{S}{100} + \frac{S}{300}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{300} + \frac{3}{300} + \frac{1}{300}} \\ &= \frac{300}{6} = 50 \end{aligned}$$

тул дундаж хурд нь 50 км/ц байжээ.

8.24.

$$S = 3v = 4(v - 15)$$

Эндээс $3v = 4v - 60 \Rightarrow v = 60$ буюу автобусны хурд 60 км/ц болов.

8.25. Алтны хэмжээ нь

$$3 \cdot 50\% = 60\% \cdot x + 30\% \cdot (3 - x)$$

тул $150 = 60x + 90 - 30x \Rightarrow x = 2$ кг болно.

9. Функци, Уламжлал, Интеграл 1

9.1. $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ тул $g(f(-2)) = g(5) = 2 \cdot 5 - 7 = 3$ байна.

9.2. Утгын муж нь $[0; 2]$ байхын тулд $f(-1) = 0$ ба $f(1) = 2$, эсвэл $f(-1) = 2$ ба $f(1) = 0$ байна. Нөгөө талаас $f(1) = a + b$ тул $a + b$ нь 0 эсвэл 2 гэсэн утгуудыг авах боломжтой юм.

9.3.

$$y' = (2x + 1)' = 2$$

9.4.

$$y' = [(2x + 3)^4]' = 2 \cdot 4(2x + 3)^{4-1} = 8(2x + 3)^3$$

9.5.

$$y' = (2^x)' = (e^{(\ln 2)x})' = e^{(\ln 2)x} \cdot [(\ln 2)x]' = 2^x \cdot \ln 2$$

9.6. Өнцгийн коэффициент нь $\text{tg} 45^\circ = 1$ байна.

9.7. $y' = 2x$ тул $f(5) = 5^2 = 25$ ба $f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$ байна. Иймд шүргэгч шулууны тэгшитгэл нь

$$y = 10(x - 5) + 25 \Rightarrow y = 10x - 25$$

байна.

9.8.

$$y = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

тул $x_0 = 1$ абсцисстай цэгт татсан шүргэгчийн өнцгийн коэффициент нь $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ байна.

Өнцгийн коэффициент нь OX тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй үүсгэх өнцгийн тангес тул уг өнцөг нь 45° байна.

9.9.

$$y' = 2x^2 - 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-2) > 0$$

болно. Эндээс

$$\left\{ \begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x+1 < 0 \\ x-2 < 0 \end{array} \right.$$

болох тул $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

9.10. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 0.5x^2 - 12x$ функцийн буурах муж нь $f'(x) = x^2 - x - 12 < 0$ тэнцэтгэл бишийн шийдийн муж байна.

$$x^2 - x - 12 < 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) < 0$$

тул $] -3; 4[$ мужид буурах тул шийдийн мужийн урт нь $4 - (-3) = 7$ байна.

9.11. $f(x) = x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6 \geq 6$ ба $x = 2$ үед

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 10 = 6$$

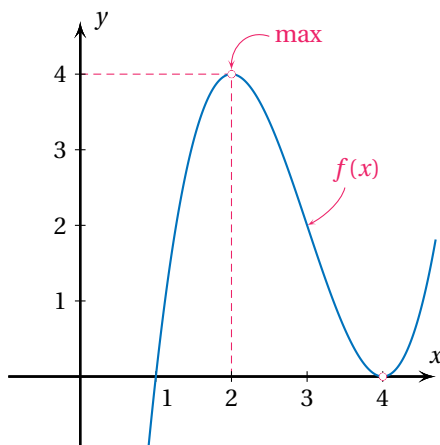
хамгийн бага утгаа авна.

9.12.

$$f'(x) = 3(x-4)(x-2)$$

тул $x = 4$ дээр минимумтай, $x = 2$ цэг дээр максимумтай. Иймд максимум утга нь

$$f(2) = (2-4)^2 \cdot (2-1) = 4$$



9.13. $2(x+y) = 16 \Rightarrow y = 8-x$ тул талбай нь $S(x) = x(8-x) = 8x - x^2$ болно.
 $S'(x) = 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4$ тул хамгийн их утга нь

$$S(4) = 4 \cdot (8-4) = 16.$$

9.14.

$$S(t) = 2t \cdot f(4+t) = 2t(4+t-1)(7-t-4) = 2t(9-t^2)$$

ба

$$S'(t) = 2(9-t^2) + 2t(-2t) = 18-6t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

болно. $t > 0$ тул $t = \sqrt{3}$ үед функц хамгийн их утгаа авна. Иймд

$$\max_y S = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (9 - (\sqrt{3})^2) = 12\sqrt{3}$$

y

$$f(4+t)$$

S

x

$$1 \quad 4-t \quad 4 \quad 4+t \quad 7$$

9.15. $\int (x-1)(x-2) dx = \int x^2 - 3x + 2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$ байна.

9.16.

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

9.17. $(e^{2x} + C)' = e^{2x} \cdot (2x)' + 0 = 2e^{2x}$ тул

$$\int 2e^{2x} dx = e^{2x} + C$$

байна.

9.18.

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \int_1^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{(1-2)^3}{6} = -\frac{1}{6}$$

9.19.

$$\int_3^{3e^4} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x \Big|_3^{3e^4} = \frac{1}{2} (\ln(3e^4) - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{3e^4}{3} = \frac{1}{2} \ln e^4 = 2$$

байна.

9.20. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ тул

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$$

байна.

9.21.

$$\begin{aligned} \int_0^4 |x-2| \, dx &= \int_0^2 |x-2| \, dx + \int_2^4 |x-2| \, dx \\ &= \int_0^2 -(x-2) \, dx + \int_2^4 (x-2) \, dx \\ &= -\int_0^2 (x-2) \, dx + \int_2^4 (x-2) \, dx \\ &= -\left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_0^2 + \left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_2^4 \\ &= -(0-2) + (2-0) = 4 \end{aligned}$$

9.22. $y = 2x^2 - 2x - 1.5$ параболын $y = 0$ шулуунтай огтлолцох цэгүүдийг олж.

$2x^2 - 2x - 1.5 = 0$ тул

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1.5)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 4}{4}$$

буюу $x_1 = -0.5$, $x_2 = 1.5$ абсцисстай цэгүүдээр огтлолцоно.

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-0.5}^{1.5} (2x^2 - 2x - 1.5) \, dx = -\int_{-0.5}^{1.5} 2(x+0.5)(x-1.5) \, dx \\ &= \frac{2}{6} \cdot (1.5 - (-0.5))^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

болно.

9.23. $x^2 = x + 2$ тэгшитгэлээс $\alpha = -1$, $\beta = 2$ гэж огтлолцлын цэгийн абсцисс олдох тул томьёо ёсоор олох талбай

$$-\int_{-1}^2 (x+1)(x-2) \, dx = \frac{(2-(-1))^3}{6} = \frac{9}{2}$$

байна.

9.24.

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^1 x \, dx = \pi \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

9.25.

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x \Rightarrow f'(x) = -6x^2 - 6x + 12$$

ба $-6(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 1$ болно. $-6 < 0$ тул $x = -2$ цэг дээр минимум, $x = 1$ цэг дээр максимум утга авна. Иймд минимум утга нь

$$f(-2) = -2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) = -20$$

максимум утга нь

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 7$$

тул зөрөө нь $7 - (-20) = 27$ байна.

10. Алгебр сэдвийн давтлага 1

10.1. $(x+1)$ -д хуваахад гарах үлдэгдэл нь тогтмол тоо тул

$$R(x) = R(-1) = P(-1) = (-1)^{2017} + (-1) + 1 = -1$$

байна.

10.2. $x^2(x^2-5) - (x^2-2)^2 + x(x-2) = x^4 - 5x^2 - (x^4 - 4x^2 + 4) + x^2 - 2x = -2x - 4$ тул 1 зэргийн олон гишүүнт байна.

10.3. Тэнцэтгэл бишийг сөрөг тоонд хуваахад тэмдэг нь эсрэгээр өөрчлөгддөг. $-2 < 0$ тул $-2x > -7 \Leftrightarrow x < \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ байна.

10.4. $a^{0.5} = x$, $b^{0.5} = y$ орлуулбал:

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= \left(\frac{2}{a^{0.5} - b^{0.5}} - \frac{2a^{0.5}}{a^{1.5} + b^{1.5}} \cdot \frac{a - a^{0.5}b^{0.5} + b}{a^{0.5} - b^{0.5}} \right) : \frac{4a^{0.5}b^{0.5}}{a - b} \\ &= \left(\frac{2}{x - y} - \frac{2x}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} \right) : \frac{4xy}{x^2 - y^2} \\ &= \left(\frac{2^{(x+y)}}{x - y} - \frac{2x}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} \cdot \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} \right) : \frac{4xy}{x^2 - y^2} \\ &= \left(\frac{2x + 2y}{x^2 - y^2} - \frac{2x}{x^2 - y^2} \right) : \frac{4xy}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{2y}{x^2 - y^2} : \frac{4xy}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{2y}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{4xy} \\ &= \frac{1}{2x} = \frac{1}{2a^{0.5}} = \frac{1}{2} a^{-0.5} \end{aligned}$$

10.5. Пропорцийн чанараар $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$ байна.

10.6. $y = x^2$ параболыг $\vec{p} = (3, -4)$ векторын дагуу параллель зөөхөд

$$y = (x-3)^2 + (-4) = (x-3)^2 - 4$$

парабол гарна.

10.7.

$$(x^2 - 4)\sqrt{2x+3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{2x+3} = 0 \end{cases}$$

Эхний тэгшитгэлээс $x = \pm 2$, хоёр дахь тэгшитгэлээс $x = -\frac{3}{2}$ гэсэн шийд гарна. $x = -2$ үед $\sqrt{2 \cdot (-2) + 3} = \sqrt{-1}$ тодорхойлогдохгүй тул шийд болохгүй. Иймд $x_1 = -\frac{3}{2} = -1.5$, $x_2 = 2$ гэсэн шийдтэй.

10.8.

$$\frac{2}{x-1} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{1}{7} > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 7 - 1 \cdot (x-1)}{7(x-1)} > 0$$

байна. Эндээс

$$\frac{15-x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-15) < 0$$

тул $1 < x < 15$ буюу $x \in]1; 15[$ байна.

10.9.

$$x^2 + 2x - 5 \geq x + 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3) \geq 0$$

тул $x \in]-\infty; -4] \cup [3; +\infty[$ байна.

10.10. Өгсөн тэгшитгэл төгсгөлгүй олон шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{1}{b}$$

тул $b = -2$ байна.

10.11. $\begin{cases} 4x + ay = 1 \\ bx + 7y = 2 \end{cases}$ тэгшитгэл шийдгүй бол

$$\frac{4}{b} = \frac{a}{7} \neq \frac{1}{2}$$

байна. Эндээс $ab = 4 \cdot 7 = 28$ байна.

10.12. Тэгшитгэлийг 4^x -д хувааж $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ орлуулга хийвэл

$$2t^2 = t + 3 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = \frac{3}{2}$$

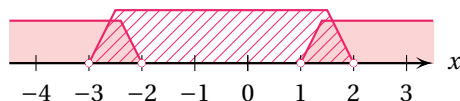
болно. $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ эерэг байх ёстой тул тэгшитгэл $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$ гэсэн цор ганц шийдтэй. Иймд шийдүүдийн нийлбэр нь 1 байна.

10.13.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x - 2) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) < 0 \\ (x+2)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 2 \\ x < -2 \cup x > 1 \end{cases}$$

тул $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$ байна.



10.14. Бутархайн хуваарь тэгээс ялгаатай ба $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ тул

$$D: \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ 1 - \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 1 \end{cases}$$

үндсэн адилтгалаас $\sin 2x \neq 0$ үед $\cos 2x \neq 1$ гэж гарах тул зөвхөн $\sin 2x \neq 0$ -ийг бодоход л хангалттай. Иймд $2x \neq \pi k$ буюу $x \neq \frac{\pi k}{2}$ байна.

10.15. $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$ байна. Иймд $4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$ болно.

10.16. $2 \sin(\pi x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ байна. Эндээс

$$\pi x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$$

буюу

$$x = (-1)^k \cdot \frac{1}{3} + k$$

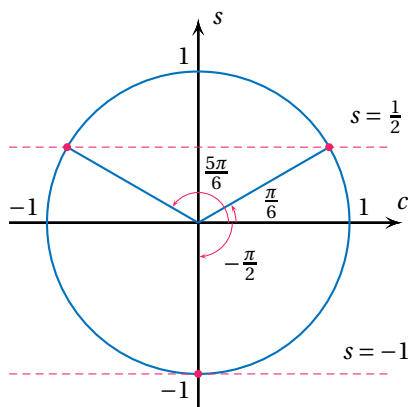
байна.

10.17. $\sin x = 2 \cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \sin x = 2(1 - \sin^2 x) - 1$ ба $s = \sin x$ гэвэл

$$2s^2 + s - 1 = 0 \Rightarrow s_1 = -1, s_2 = \frac{1}{2}$$

болно. Иймд

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Эндээс $[-\pi; \pi]$ завсар дахь шийдүүд нь $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ тул үржвэр нь

$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi^3}{72}$$

байна.

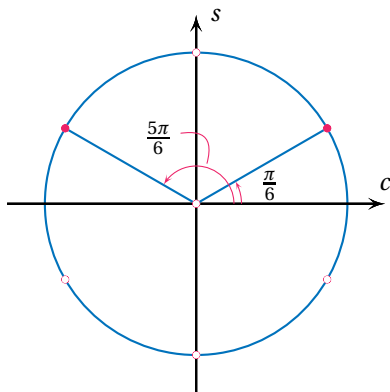
10.18. Нийлбэрийг үржвэрт хувиргах томьёо ашиглавал

$$\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos \frac{2x + 4x}{2} \cos \frac{2x - 4x}{2} = 0$$

тул $\cos x = 0$ эсвэл $\cos 3x = 0$ болно. $\cos x = 0$ үед $\sin x = \pm 1$ тул $0 < \sin x < 1$ нөхцөлд тохирохгүй.

$$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

Эдгээрийг тригонометрийн нэгж тойрог дээр дүрсэлбэл

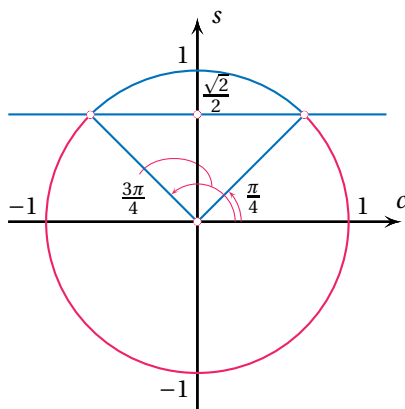


болох ба эдгээрээс зөвхөн $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ өнцгүүд дээр синусийн утга нь $]0; 1[$ засварт байх тул тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$$

байна.

10.19.



$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

тул

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{4} + 2\pi(k-1) < 6x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k &\Leftrightarrow -\frac{11\pi}{12} + 2\pi k < 6x < \frac{7\pi}{12} + 2\pi k \Leftrightarrow \\ -\frac{11\pi}{72} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{7\pi}{72} + \frac{\pi k}{3} \end{aligned}$$

тул $x \in \left[\frac{k\pi}{3} - \frac{11\pi}{72}; \frac{7\pi}{72} + \frac{k\pi}{3} \right]$ байна.

10.20. Шийдийг шууд орлуулан шалгах нь хамгийн хялбар арга боловч энэ удаад бодолт хийе.

$$\sqrt{2-x} \cdot \log_3(10-x^2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 0 \vee \log_3(10-x^2) = 0$$

$\sqrt{2-x} = 0$ бол $x = 2$ шийд гарах ба $\log_3(10-x^2) = 0$ бол $10-x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 3$ байна. Гэвч $x = 3$ нь $\sqrt{2-x}$ илэрхийллийн тодорхойлогдох мужид орохгүй тул шийд болохгүй. Иймд $x = -3, 2$ гэсэн шийдтэй.

10.21. Гоожуур тус бүр цагт усан сангийн $\frac{1}{4.5}, \frac{1}{6.75}$ хэсгүүдийг дүүргэх тул хамтдаа

$$\frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.75} = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27}$$

хэсгийг дүүргэнэ. Иймд нийт хэсгийг $\frac{1}{\frac{10}{27}} = 2.7$ цагт дүүргэнэ.

10.22. O нь бөмбөрцгийн төв, M нь конусын суурийн тойрог дээрх цэг гэе. OM хэрчмийн цилиндрийн гол тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг θ гэвэл суурийн радиус нь $6\sin\theta$, өндөр нь $6 + 6\cos\theta$ байна. Конусын эзлэхүүн нь

$$V(\theta) = \frac{\pi}{3} (6\sin\theta)^2 (6 + 6\cos\theta)$$

ба $c = \cos\theta$, $|c| \leq 1$ гэвэл $\sin^2\theta = 1 - c^2$ тул

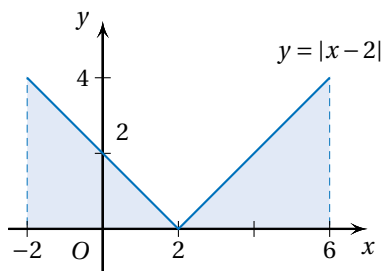
$$V(c) = \frac{\pi}{3} \cdot 6^3 (1 - c^2)(1 + c)$$

байна. c -ийн ямар утганд конусын эзлэхүүн хамгийн их байхыг олѐ.

$$V'(c) = 0 \Rightarrow 1 - 2c - 3c^2 = 0 \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = \frac{1}{3}$$

болно. Эндээс $c = \frac{1}{3}$ үед $V(c)$ хамгийн их утгаа авна. Энэ үед бөмбөрцгийн төвөөс суурь хүртэлх зай $d = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ см байна.

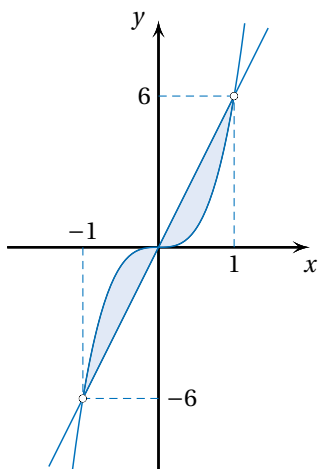
10.23.



$\int_{-2}^6 |x-2| dx$ интеграл нь будагдсан хэсгийн (2 гурвалжны) талбайтай тэнцүү тул

$$\frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 \text{ байна.}$$

10.24.



$x > 0$ хэсэг дэх талбай нь

$$\int_0^1 (6x - 3x^3) dx = \left(3x^2 - \frac{3x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Иймд бидний олох талбай $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ байна.

10.25.

$$\begin{aligned} \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} &= \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)^2 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2x < \frac{5}{8} \end{aligned}$$

болно. Эндээс $\cos 4x < -\frac{1}{2}$ болно. Үүнийг бодвол

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Энэ шийдэд агуулагдах хамгийн бага эерэг бүхэл тоо $x = 2$, хамгийн их сөрөг бүхэл тоо $x = -2$ болно.

11. Хавтгайн геометр 1

11.1. Хурц өнцгүүдийн нийлбэр 90° тул $90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

11.2. Заавар ёсоор

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$$

буюу

$$7^2 = 3^2 + AC^2 - 2 \cdot 3 \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$

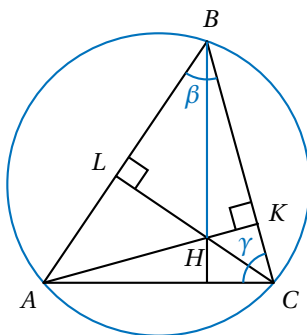
байна. $\cos 120^\circ = -0.5$ тул $AC^2 + 3AC - 40 = 0$ квадрат тэгшитгэл үүснэ. Энэ тэгшитгэлийг бодвол $AC = -8$ $\vee$ $AC = 5$ болох ба $AC > 0$ байх ёстой тул $AC = 5$ байна.

Жич: Энэ бодлогын хувьд гурвалжны тэнцэтгэл бишээр А хариулт шийд биш. Мохоо өнцгийн эсрэг тал нь хамгийн урт байх ёстой тул D, E хариултууд зөв хариултууд болж чадахгүй. Иймд үлдэх 2 хариултаас зөв хариултыг тааж болох юм. Боломжгүй хариултуудыг хасаж чаддаг байх нь ЭЕШ-ийн оноогоо ахиулахад тань том тус хүргэнэ.

11.3. Гурван талынх нь урт ялгаатай тул мэдээж адил хажуут биш. $10 + 14 > 17$ тул гурвалжны талууд болно. $10^2 + 14^2 > 17^2$ тул хурц өнцөгт гурвалжин байна.

11.4. Зөв гурвалжин тул $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ байна. Иймд $2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a = 6$.

11.5. АН ба ВС огтлолыг K, $\angle BAH = \beta$, $\angle BKA = \gamma$ гэе.



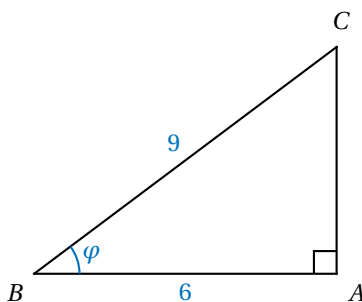
$\triangle AKB$ тэгш өнцөгт гурвалжнаас $BK = AB \cos \beta$, $\angle HBK = 90^\circ - \gamma$ ба $\triangle BKH$ тэгш өнцөгт гурвалжин тул

$$BH = \frac{BK}{\cos(90^\circ - \gamma)} = \frac{AB \cos \beta}{\sin \gamma} = 2R \cos \beta$$

болно. $\beta = 90^\circ - \angle BAH$ тул $\cos \beta = \sin \angle BAH = \frac{2}{5}$. Иймд

$$BH = 2R \cos \beta = 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{5} = 3\frac{1}{5}$$

11.6.



Тодорхойлолт ёсоор $\cos \angle ABC = \frac{BA}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ байна.

$$11.7. h = \frac{10 \cdot 24}{26} = \frac{120}{13} = 9 \frac{3}{13}.$$

11.8. Зөв гурвалжны өндөр нь $a \cdot \sin 60^\circ$ тул $m = h = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ болох ба багтсан тойргийн радиус нь медианы $\frac{1}{3}$ хэсэг тул $r = \frac{m}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ байна.

11.9. Зөв гурвалжны хувьд $CH = R$ байх ба $\angle BCA = 60^\circ$ байна. Иймд D хариултаас өөр зөв хариулт байх боломжгүй.

11.10. Оройн өнцөг нь $\beta = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ тул

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 16\sqrt{3}.$$

11.11. $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$ тул Героны томъёогоор

$$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$$

байна.

11.12. $5^2 + 12^2 = 13^2$ тул ABC нь тэгш өнцөгт гурвалжин ба талбай нь

$$S_{\triangle ABC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

байна. Биссектрисийн чанар ёсоор

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{13}{17}$$

тул ABD , ABC гурвалжнууд нь ижил өндөртэй гурвалжнууд тул

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{13}{17} \cdot AB}{BC} = \frac{\frac{13}{17} \cdot 5}{13} = \frac{5}{17}$$

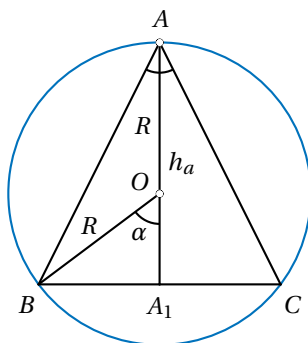
болно. Эндээс $S_{\triangle ABD} = \frac{5}{17} \cdot 30 = \frac{150}{17}$ болов.

11.13. $3^2 + 4^2 = 5^2$ тул тэгш өнцөгт гурвалжин болно. Иймд медианы урт нь $\frac{5}{2} = 2.5$ байна.

11.14. Синусын теоремоор $BC = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 16$ байна. Гурав дахь орой нь багтаасан тойрог дээр, өндөр нь хамгийн их тул $AB = AC$ байх адил хажуут гурвалжин байна. Эдгээрийн их нь $h_a = R + R \cos \alpha = 10 + 10 \cdot \frac{3}{5} = 16$ өндөртэй тул талбайн хамгийн их утга нь

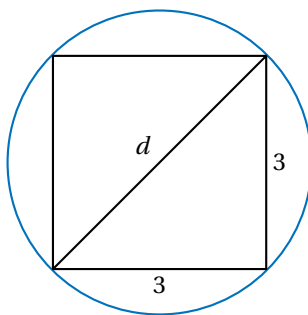
$$S_{\max} = \frac{16 \cdot 16}{2} = 128$$

байна.



11.15. $c^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2 \Rightarrow c = 41$ тул $r = \frac{9 + 40 - 41}{2} = 4$ байна.

11.16.



Диагоналийн урт нь $d^2 = 3^2 + 3^2$ буюу $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Тойргийн уртыг диаметр харицуулсан харьцаа $\frac{\ell}{d} = \pi$ тул $\ell = 3\pi\sqrt{2}$ байна.

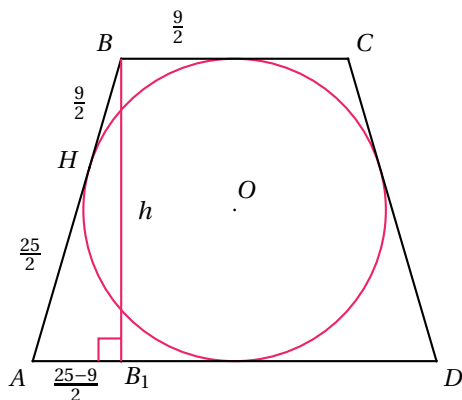
11.17. $\frac{AF}{FE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AF}{FE} + 1 = \frac{1}{2} + 1$ тул $\frac{AF + FE}{FE} = \frac{AE}{FE} = \frac{3}{2}$ ба $AE = \frac{3}{2}(2x + 2) = 3x + 3$.

11.18.

$$e^2 + 9^2 = 2(3^2 + 7^2) \Rightarrow e = \sqrt{35}$$

11.19. Тойрогт багтдаг тул адил хажуут байна. Хажуу талын уртыг a гэвэл тойрог

багтаадаг тул хажуу талын урт нь $2a = 25 + 9 \Rightarrow a = 17$.

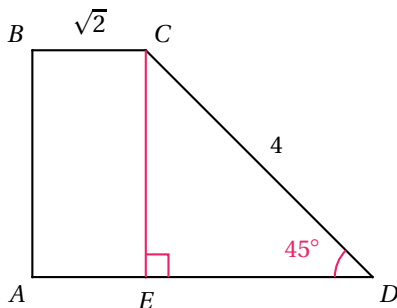


Эндээс Пифагорын теорем ёсоор

$$h = \sqrt{17^2 - \left(\frac{25-9}{2}\right)^2} = 15$$

байна. Иймд талбай нь $S = \frac{25+9}{2} \cdot 15 = 255$.

11.20.



$CE = ED = CD \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ тул $h = 2\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{2}$ байна. Иймд талбай нь

$$S = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$$

байна.

11.21. Өнцгүүдийг x , $2x$, $5x$, $4x$ гэвэл

$$x + 2x + 5x + 4x = 360^\circ \Rightarrow 12x = 360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

ба $x + 5x = 2x + 4x = 180^\circ$ тул тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт байна. Багтаасан тойргийн радиусыг R гэвэл

$$AC : BD = 2R \sin 60^\circ : 2R \sin 30^\circ =$$

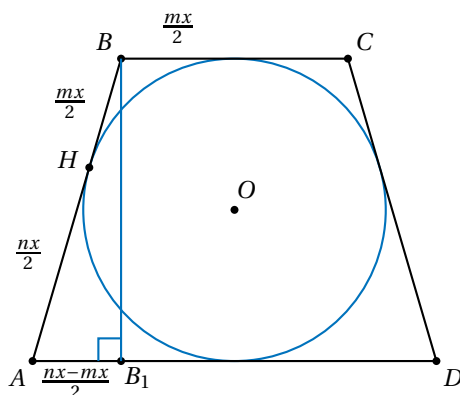
$$= \sin 60^\circ : \sin 30^\circ = \sqrt{3} : 1$$

11.22. Зөв зургаан өнцөгт тул багтаасан тойргийн радиус нь зургаан өнцөгтийн талын урттай тэнцүү байна. Иймд $r = \frac{24}{6} = 4$ байна. Иймд дугуйн талбай 16π байна. Зөв зургаан өнцөгтийн талбай 4 талтай зөв гурвалжны талбайгаас 6 дахин их тул $6 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 4^2}{4} = 24\sqrt{3}$ байна. Иймд зурааслагдсан хэсгийн талбай

$$16\pi - 24\sqrt{3}$$

байна.

11.23. Суурийн уртуудыг mx , nx гэвэл оройгоос шүргэлтийн цэгүүд хүртэлх зай $\frac{mx}{2}$, $\frac{nx}{2}$ тул хажуу талын урт нь $\frac{(m+n)x}{2}$ байна.



Нөгөө талаас трапецийн өндөр нь

$$H = 2r = \sqrt{\left(\frac{(m+n)x}{2}\right)^2 - \left(\frac{(m-n)x}{2}\right)^2} = x\sqrt{mn}$$

тул $x = \frac{2r}{\sqrt{mn}}$ байна. Иймд

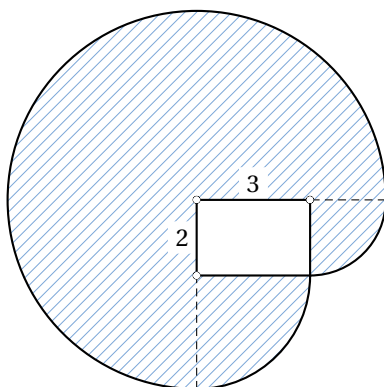
$$\frac{(m+n)x}{2} = \frac{r(m+n)}{\sqrt{mn}}.$$

11.24.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 7 \\ r_1 + r_3 = 8 \\ r_2 + r_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow r_1 = \frac{7+8-9}{2} = 3$$

болно. Иймд $r_2 = 7 - 3 = 4$, $r_3 = 9 - 3 = 6$ байна.

11.25. Зургаас харахад ямааны идэж болох талбай 5 радиустай дугуйн $\frac{3}{4}$, 2 ба 3 радиустай дугуйнуудын тус бүр $\frac{1}{4}$ хэсэг байна.



Иймд

$$\frac{3}{4} \cdot 5^2 \pi + \frac{1}{4} (2^2 + 3^2) \pi = 22\pi$$

байна.

12. Огторгуйн геометр 1

12.1. $\sqrt{3}a = \sqrt{12} \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$. Нийт 12 ирмэг байгаа тул эдгээрийн уртын нийлбэр нь $12 \cdot 2 = 24$.

12.2. Пирамидын суурь нь $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ катетуудтай тэгш өнцөгт гурвалжин; өндөр нь $\frac{c}{2}$ тул эзлэхүүн нь

$$V_1 = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{abc}{48} = \frac{V}{48} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{48}$$

байна.

12.3.

$$V = \sqrt{10 \cdot 25 \cdot 40} = 100$$

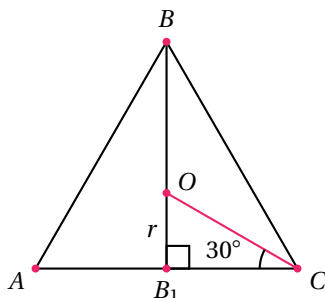
12.4. Багтсан бөмбөрцгийн радиусыг r гэе. Суурь нь r радиустай тойрог багтаасан зөв гурвалжин тул талын урт нь

$$AC = 2B_1C = 2r \operatorname{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3}r,$$

талбай нь

$$S = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}r)^2 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}r^2$$

байна.

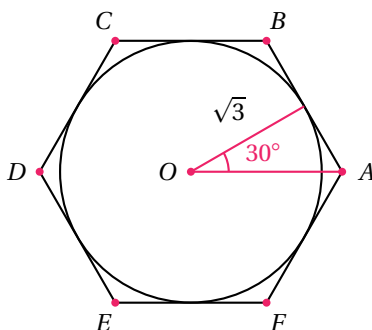


Призмийн өндөр нь $2r$ тул хажуу гадаргуугийн талбай нь суурийн периметрийг өндрөөр үржсэнтэй тэнцүү буюу $3 \cdot 2\sqrt{3}r \cdot 2r = 12\sqrt{3}r^2$ байна. Иймд бүтэн гадаргуугийн талбай нь

$$2 \cdot 3\sqrt{3}r^2 + 12\sqrt{3}r^2 = 18\sqrt{3}r^2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

байна.

12.5.



Зөв 6 өнцөгтийн талын урт нь

$$AB = OA = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

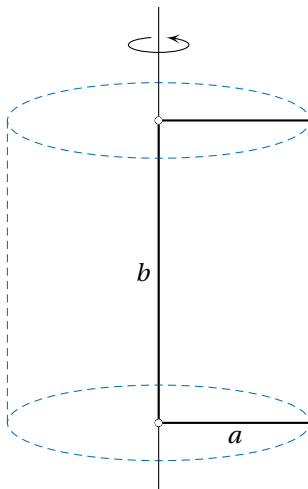
Иймд суурийн талбай нь

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Призмийн өндөр нь багтсан бөмбөрцгийн диаметр тул $h = 2\sqrt{3}$. Иймд эзлэхүүн нь

$$V = S \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 18$$

12.6. a, b талтай тэгш өнцөгтийг b урттай талыг нь тойруулан эргүүлэхэд суурийн радиус нь a , өндөр нь b байх цилиндр үүснэ.

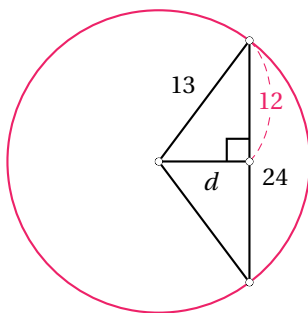


тул эзлэхүүн нь $V = \pi a^2 b$ байна. Иймд бидний олох харьцаа нь

$$\frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 5}{\pi \cdot 5^2 \cdot 15} = 3$$

байна.

12.7. Бид 13 см радиустай тойргийн $\ell = 24$ см урттай хөвч хүртэлх зайг бодох шаардлагатай.



Төвөөс хөвч хүртэлх зайг d гэвэл Пифагорын теорем ёсоор $R^2 = d^2 + (\ell/2)^2$ байх тул

$$d = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

байна.

12.8. Зөв тетраэдрийн талын уртыг a гэвэл $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ тул

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 60^\circ \\ &= a^2 \cos 60^\circ - a^2 \cos 60^\circ = 0 \end{aligned}$$

болов. Иймд эдгээр векторуудын хоорондох өнцөг 90° байна.

12.9. Хажуу талсууд нь адил хажуут гурвалжнууд тул хажуу талсын өндрүүдийн суурь нь суурийн талуудын дундаж цэг байна. Иймд өндрүүдийн сууриар үүсэх гурвалжны талбай пирамидын суурийн талбайгаас 4 дахин бага байна.

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

тул ижил өндөртэй пирамидуудын эзлэхүүний харьцаа нь сууриудын талбайн харьцаатай тэнцүү. Иймд бидний олох харьцаа $\frac{1}{4}$ -тэй тэнцүү.

12.10. $\sqrt{17} + 1$ урттай талыг тойрч эргэх үед өндөр нь $\sqrt{17} + 1$, суурийн радиус нь $\sqrt{17} - 1$ тул эзлэхүүн нь

$$V_1 = \frac{\pi}{3}(\sqrt{17} - 1)^2(\sqrt{17} + 1)$$

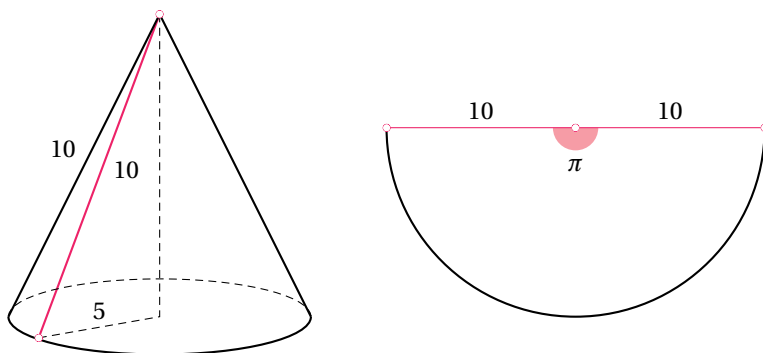
$\sqrt{17} - 1$ урттай талыг тойрч эргэх үед өндөр нь $\sqrt{17} - 1$, суурийн радиус нь $\sqrt{17} + 1$ тул эзлэхүүн нь

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(\sqrt{17} + 1)^2(\sqrt{17} - 1)$$

ба харьцаа нь:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{\pi}{3}(\sqrt{17} - 1)^2(\sqrt{17} + 1)}{\frac{\pi}{3}(\sqrt{17} + 1)^2(\sqrt{17} - 1)} = \frac{\sqrt{17} - 1}{\sqrt{17} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} - 1)}{(\sqrt{17} + 1)(\sqrt{17} - 1)} = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{(\sqrt{17})^2 - 1} \\ &= \frac{9 - \sqrt{17}}{8} \end{aligned}$$

12.11. 10 радиустай тойргийн урт $2 \cdot 10\pi = 20\pi$ ба дэлгээсийн суурийн ирмэгийн урт 10π тул энэ дэлгээс маань 10 радиустай хагас дугуй болно.

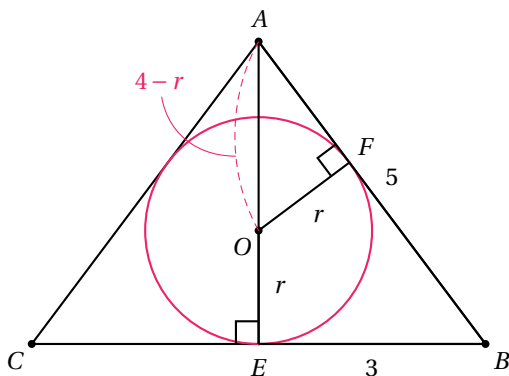


Иймд талбай нь $\frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 50\pi$.

12.12. Их дугуйн талбай нь $\pi R^2 = 144\pi$ тул $R = 12$ байна. Бөмбөрцгийн эзлэхүүн

$$V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \pi = \frac{4 \cdot 12^3 \pi}{3} = 2304\pi$$

12.13.



Багтсан бөмбөрцгийн радиусыг r гэе. Конусын тэнхлэг огтлол авч үзвэл зурагт үзүүлсэн AFO , AEB гурвалжнууд төсөөтэй тул

$$\frac{4-r}{5} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

Иймд бөмбөрцгийн эзлэхүүн

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 4.5\pi.$$

12.14.

$$\left(\frac{-1+1}{2}; \frac{-3+7}{2}\right) = (0; 2)$$

12.15.

$$AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

12.16. $y = kx + b$ шулуун өнцгийн коэффициент нь k . $3x + 4y = 25 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ тул өнцгийн коэффициент нь $-\frac{3}{4}$ байна.

12.17.

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ 2x+y-7=0 \end{cases} \Rightarrow x=2y+1 \quad (*)$$

тул $2x + y - 7 = 2(2y + 1) + y - 7 = 5y - 5 = 0$. Иймд $y = 1$ ба $(*)$ -оос $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ болох тул $(x; y) = (3; 1)$.

12.18.

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-4}{3-4} \Leftrightarrow x-5y+17=0$$

12.19.

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) - 3 \cdot (2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1) \\
 &= 13 - 3 = 10
 \end{aligned}$$

байна.

12.20. $\alpha = \arcsin \frac{5}{13}$ гэвэл

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

тул $\cos \alpha > 0$ буюу

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

Иймд

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{26} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{12}{13} = 12\sqrt{2}$$

12.21.

$$(x, y, z) - (4, -2, 1) = (1, 5, -1) \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (1, 5, -1) + (4, -2, 1) = (1 + 4, 5 + (-2), -1 + 1) = (5, 3, 0)$$

12.22.

$$2 \cdot (2, -1, 1) = (4, -2, 2) \Rightarrow (2, -1, 1) \parallel (4, -2, 2)$$

12.23.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 0$$

тул эдгээрийн хоорондох өнцгийн косинус нь

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$$

болно. Иймд хоорондох өнцөг нь 90° байна.

12.24.

$$1. \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \cdot (-3; 2) - 3(1; 1) = (2 \cdot (-3) - 3 \cdot 1; 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = (-9, 1) \text{ тул } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(-9)^2 + 1^2} = \sqrt{82} \text{ болно.}$$

$$2. \quad (-7, 2) = 2(1, a) - 3(b, 2) \text{ ба } (-7, 2) = (2 - 3b, 2a - 6) \text{ болох тул}$$

$$\begin{cases} -7 = 2 - 3b \\ 2 = 2a - 6 \end{cases}$$

системийг бодвол $a = 4, b = 3$ болно.

3. $\vec{u}$ вектортой параллел нэгж вектор нь $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ байна. Иймд $\vec{u} = (3, -4)$ гэдгээс

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Олох ёстой нэгж векторыг $\vec{e}$ гэвэл

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{5} \cdot (3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

болно.

12.25. Пирамидын суурийн талбай нь

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \sin 60^\circ = 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

тул эзлэхүүн нь

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 5 = 30$$

13. Геометр сэдвийн давтлага 1

13.1. Гурав дахь талын урт нь дундаж шугамаасаа 2 дахин их буюу 10 см байна. Иймд гурвалжны талуудын урт 9, 10, 17 болно. Косинусын теоремоор

$$\cos \alpha = \frac{10^2 + 17^2 - 9^2}{2 \cdot 10 \cdot 17} = \frac{77}{85}$$

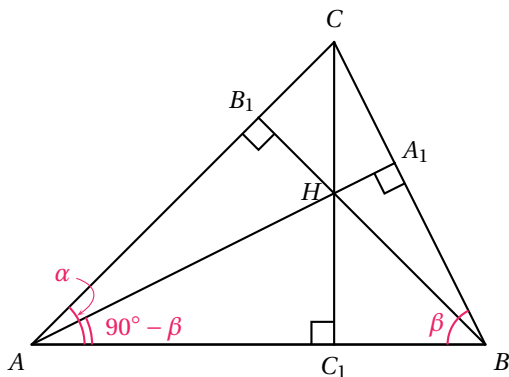
ба

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{77^2}{85^2}} = \frac{\sqrt{85^2 - 77^2}}{85} = \frac{36}{85}$$

болно. Иймд синусын теоремоор

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{9}{2 \cdot \frac{36}{85}} = \frac{85}{8}$$

13.2.



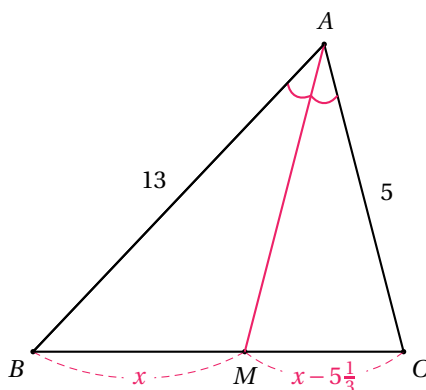
$$AC_1 = AC \cos \alpha = b \cos \alpha,$$

$$AH = \frac{AC_1}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{b \cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \cos \alpha = 2R \cos \alpha$$

13.3. Биссектрисийн чанар ёсоор

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CM}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{13} = \frac{x - 5\frac{1}{3}}{5} \Leftrightarrow 5x = 13x - \frac{16 \cdot 13}{3}$$

буюу $8x = \frac{16 \cdot 13}{3}$ тул $x = \frac{26}{3}$ байна.



13.4. Талын уртыг a гэвэл параллелограммын чанар ёсоор

$$2(a^2 + a^2) = 6^2 + 8^2 \Rightarrow a = 5$$

байна.

13.5. Пифагорын теоремоор нөгөө катетын урт нь $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ байна. Их хурц өнцгийн оройгоос татсан биссектрис нь эсрэг талаа $\frac{5 \cdot 12}{5 + 12} = \frac{10}{3}$, $\frac{13 \cdot 12}{5 + 12} = \frac{26}{3}$ урттай хэсгүүдэд хуваана. Иймд биссектрис нь 5 , $\frac{10}{3}$ катетуудтай тэгш өнцөг гурвалжны гипотенуз болно. Эндээс Пифагорын теоремоор

$$\ell = \sqrt{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

13.6. Багтсан тойргийн радиусыг r , гэвэл трапецийн өндөр буюу нэг хажуу тал нь $2r$ байна. Иймд тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн чанар ёсоор нөгөө хажуу тал нь

$$\ell = a + b - 2r$$

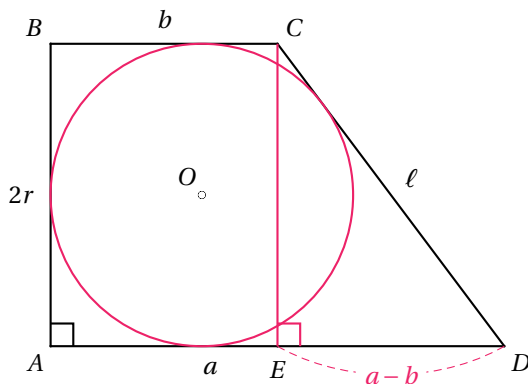
байна. Иймд Пифагорын теоремоор

$$(a + b - 2r)^2 = (2r)^2 + (a - b)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 4r^2 + 2ab - 4ar - 4br = 4r^2 + a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow$$

$$4ab = 4(a+b)r \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$

байна.

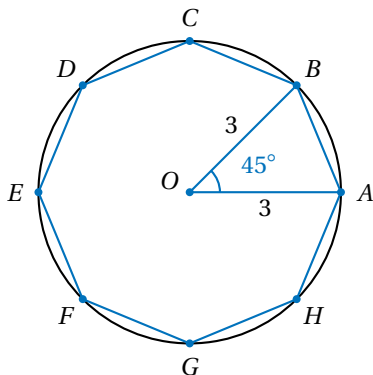


13.7. Квадратын талбай нь

$$S = a^2 = (2R \cos 45^\circ)^2 = \left(2R \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2R^2.$$

Дугуйн талбай πR^2 тул харьцаа нь $\frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$.

13.8.



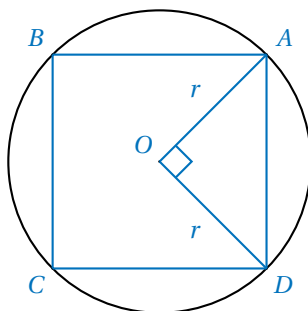
$ABCDEFGH$ зөв найман өнцөгт O төвтэй тойрогт багтсан гэе. Тэгвэл

$\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ байна. Иймд AOB гурвалжны талбай

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Зөв найман өнцөгтийн талбай $8 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = 18\sqrt{2}$.

13.9.



Дугуйн радиусыг r гэвэл талбай нь πr^2 , багтсан квадратын талбай нь $4 \times \frac{1}{2}r^2 = 2r^2$ байна. Иймд

$$\pi r^2 - 2r^2 = 2\sqrt{3}(\pi - 2) \Rightarrow r^2 = 2\sqrt{3}$$

байна. Нөгөө талаас багтсан зургаан өнцөгт маань r талтай 6 ширхэг зөв гурвалжнаас тогтох тул талбай нь

$$S = 6 \times \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = 9$$

байна.

13.10. $\begin{cases} 2x + x = 15 \\ x + y = 6 \end{cases}$ эсвэл $\begin{cases} 2x + x = 6 \\ x + y = 15 \end{cases}$ байна. Эхний тэгшитгэлээс $x = 5, y = 1$ тул талуудын урт 1, 10, 10 байна. Хоёр дахь тэгшитгэлээс $x = 2, y = 13$ болох ба энэ үед 13, 4, 4 нь гурвалжны тэнцэтгэл бишийг хангахгүй тул гурвалжны талууд байж чадахгүй.

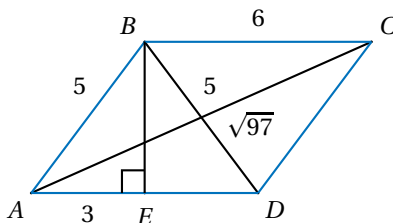
13.11. $e^2 + f^2 = 2(5^2 + 6^2)$, $e + f = 5 + \sqrt{97}$ тул

$$2ef = (5 + \sqrt{97})^2 - 2(5^2 + 6^2)$$

буюу

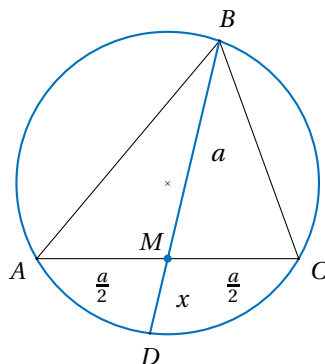
$$ef = 5\sqrt{97}$$

тул $e = 5, f = \sqrt{97}$ эсвэл $e = \sqrt{97}, f = 5$ байна. Иймд параллелограммын богино диагональ 5 болно.



Зургаас ABD адил хажуут тул B оройгоос буусан BE өндөр нь медиан болно. Иймд $AE = \frac{6}{2} = 3$. Иймд Пифагорын теоремоор $BE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ болно. Иймд параллелограммын талбай нь $S = 6 \cdot 4 = 24$ байна.

13.12.

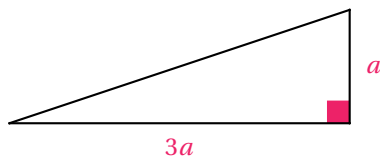


Огтлолцсон хөвчийн чанараар

$$x \cdot a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

тул $BD = a + \frac{a}{4} = \frac{5}{4}a$ байна.

13.13. Бага катетийн уртыг a гэвэл их катет нь $3a$ байна. Пифагорын теоремоор $a^2 + (3a)^2 = (2\sqrt{10})^2$ болно. Эндээс $10a^2 = 40$ болох тул $a = 2$. $S = \frac{a \cdot 3a}{2} = 6$ байна.

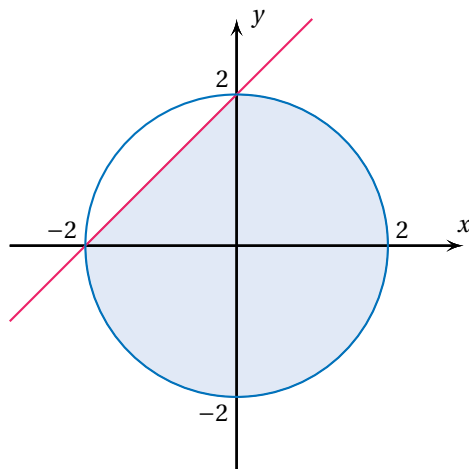


13.14. Гурвалжны периметр нь $6 + 10 + 12 = 28$ см байна.

$$6 = y + z, 10 = x + z, 12 = x + y \Rightarrow 2x = 16, 2y = 8, 2z = 4$$

таслагдсан гурвалжны периметр нь 16 тул 12 см талтай параллель шүргэгчээр үүсэх гурвалжин байна. $\triangle ALM \sim \triangle ABC$ тул

$$\frac{LM}{BC} = \frac{P_{\triangle ALM}}{P_{\triangle ABC}} \Rightarrow LM = \frac{16}{28} \cdot 12 = \frac{24}{7}$$

13.15. Шийдийн мужийг зургаар дүрсэлбэл

байна. Энэ нь 2 радиустай дугуйн $\frac{3}{4}$ хэсэг ба 2 катеттай адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжинд хуваагдах дүрс тул талбай нь

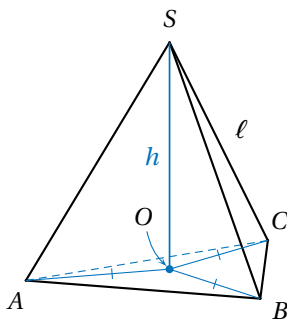
$$\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3\pi + 2$$

байна.

13.16. Хажуу талсын талбайг S гэвэл суурь дээрх проекцийн талбай нь $S \cdot \cos \varphi$ байна. Хажуу гадаргуугийн талбай $3S$, суурийн талбай $3S \cdot \cos \varphi$ тул харьцаа нь

$$\cos \varphi = \frac{S \cos \varphi}{S} = \frac{3S \cos \varphi}{3S} = \frac{2}{3}$$

байна.

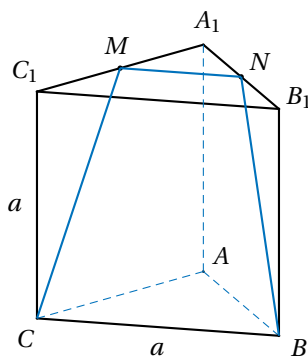
13.17.

Өндрийн суурийг O , хажуу ирмэгүүдийн уртыг $SA = SB = SC = \ell$ гэвэл Пифагорын теоремоор

$$OA^2 = OB^2 = OC^2 = \ell^2 - h^2$$

тул $OA = OB = OC$ байна. Иймд O багтаасан тойргийн төв юм.

13.18. Параллел хавтгайнуудыг огтлолж буй тул $BC \parallel MN$ байна. Нөгөө талаас $A_1M = MC_1$ тул MN нь $A_1B_1C_1$ гурвалжны дундаж шугам болно. Иймд A_1MN нь $\frac{a}{2}$ талтай зөв гурвалжин болно. Бидний олох зүйл нь дээд суурь нь $\frac{a}{2}$ талтай зөв гурвалжин, доод суурь нь a талтай зөв гурвалжин байдаг a өндөртэй огтлогдсон пирамидын эзлэхүүн юм.

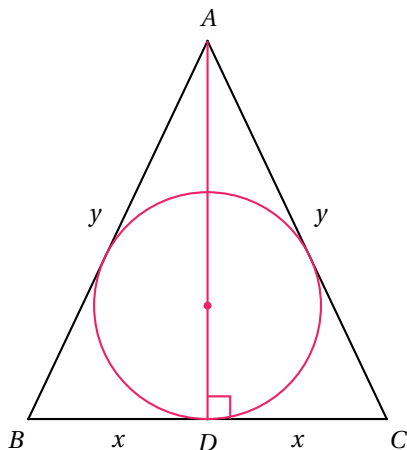


Дээд суурийн талбай нь $S_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{16}$, доод суурийн талбай нь $S_2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ тул огтлогдсон пирамидын эзлэхүүн нь

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{16} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}a^2}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4}} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \right) a \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{16} + \frac{\sqrt{3}a^2}{8} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \right) a = \frac{7\sqrt{3}a^3}{48} \end{aligned}$$

13.19. Зааварт өгсөн хөндлөн огтлол нь 18 нэгж өндөртэй, багтсан тойргийн радиус нь 5 нэгжтэй тэнцүү адил хажуут гурвалжин байх ба суурийн урт нь пирамидын суурийн

талын урттай тэнцүү байна.



Гурвалжны талбай нэг талаас $S = pr = 5(x + y)$. нөгөө талаас $S = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot (2x) = 18x$ тул $18x = 5(x + y)$ буюу $y = \frac{13}{5}x$ болно. Пифагорын теорем ёсоор

$$x^2 + 18^2 = y^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

тул пирамидын суурийн талын урт $2x = 15$ байна. Иймд пирамидын эзлэхүүн

$$V = \frac{1}{3} 15^2 \cdot 18 = 1350$$

13.20. 6, 8, 10 талтай гурвалжин тэгш өнцөгт гурвалжин тул талбай нь $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ байна. Үүний 60° өнцөг үүсгэх хавтгай дээр проекц нь $24 \cos 60^\circ = 12$ талбайтай байна.

13.21.

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = -12$$

$$\vec{m} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\vec{n} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

Иймд

$$\cos \alpha = \frac{-12}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

байна. $\alpha \leq 180^\circ$ тул $\alpha = 150^\circ$ байна.

13.22. $\vec{a} + 2\vec{b} = -\frac{1}{2}(-2\vec{a} - 4\vec{b})$ тул $\vec{a} + 2\vec{b} \parallel -2\vec{a} - 4\vec{b}$ байна.

13.23.

$$AB: \frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-(-3)}{4-(-3)}$$

тул

$$7x - 14 = -4y - 12 \Leftrightarrow 7x + 4y - 2 = 0$$

байна.

13.24. BC хэрчмийн дундаж цэг буюу медианы суурь нь:

$$M\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{5+(-3)}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = M(1; 1; 3)$$

байна. AM медианы урт нь

$$AM = \sqrt{(1-2)^2 + (1-(-3))^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{81} = 9.$$

13.25. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1^2 + 2^2 = 5$. Иймд

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 + 2 \cdot 5 = 10$$

14. Комбинаторик 1

14.1. $C_7^5 = C_7^{7-5} = C_7^2 = \frac{7 \cdot (7-1)}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ байна.

14.2. $C_n^k = C_n^{n-k}$ тул $C_{20}^k = C_{20}^{20-k}$ байна.

14.3.

$$3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2!} + (x-2) \cdot 2 = 4 \cdot (x-2)(x-3) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(3x-3+4-8x+24) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

гэсэн шийдүүд гарах ба A_{x-2}^2 нь $x \geq 4$ үед утгатай тул $x = 5$ байна.

14.4. $C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5!} \cdot 2^5 \cdot 5^5 = 63 \cdot 2^7 \cdot 5^5$.

14.5. Биномын хамгийн их коэффициент нь голын гишүүн буюу C_{12}^6 байна.

14.6. $\left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right)^{50}$ биномын ерөнхий гишүүн нь

$$C_{50}^n (x^5)^{50-n} (x^{-3})^n = C_{50}^n x^{250-8n} = C_{50}^n x^{10}$$

тул $250 - 8n = 10 \Rightarrow n = 30$ байна.

14.7. Хорин тооноос 3 ба 4-ийн ядаж нэгэнд нь хуваагдах тоог шууд тоочоод олж болно. 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20 буюу 10 тоо байна. Цөөхөн элементтэй олонлогийн хувьд ийм бодолт хийхэд нэг их цаг орохгүй.

A -нь 3-т хуваагдах тоонуудын олонлог, B -нь 4-д хуваагдах тоонуудын олонлог гэвэл $|A| = [20/3] = 6$, $|B| = [20/4] = 5$ ба $A \cap B$ буюу хоёуланд нь зэрэг хуваагдах тоонуудын олонлогийн хувьд $|A \cap B| = \left[\frac{20}{3 \cdot 4}\right] = 1$ байна. Ядаж нэгэнд нь хуваагдах тоонуудын олонлог нь $A \cup B$ тул

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 6 + 5 - 1 = 10.$$

14.8. $a = 1$ үед $1 \leq b \leq 29$ буюу 29 хос, $a = 2$ үед $1 \leq b \leq 28$ буюу 28 хос, ..., $a = 29$ үед $1 \leq b \leq 1$ буюу 1 хос байна. Нийт

$$29 + 28 + \dots + 1 = \frac{29+1}{2} \cdot 29 = 435.$$

14.9. $A = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ тул хуваагчдын тоо нь

$$(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$$

байна

14.10. Эхний цифрийг 9 янзаар сонгоод түүний араас 2 дахь цифрийг 10 янзаар сонгож болох тул эхний хоёр цифрийг нийт 90 янзаар сонгож болно. 3 дахь цифрийг эхний хоёр нь ямар тоо байхаас үл хамааран 10 янзаар сонгож болох тул эхний гурван цифрийг 900 янзаар, эхний 4 цифрийг 9000 ялгаатай аргаар сонгож болно. Сүүлийн цифрийг 5 янзаар сонгох тул нийт $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45000$ ширхэг цифрүүдийн нийлбэр сондгой 5 оронтой тоо байна.

14.11. $n = 4$ үед 2, 6, 4, 12, 4 гэсэн утгууд өгч байна. Нөгөө талаас гүдгэр 4 өнцөгт 2 диагональтай тул А хариулт зөв байна.

14.12. Бидний хувьд $a \in \text{НОМ}$, $b \in \text{ДЭВТЭР}$ байх (a, b) хосуудын тоог олно. $|\text{НОМ}| = 3$, $|\text{ДЭВТЭР}| = 5$ тул үржвэрийн зарчим ёсоор $3 \cdot 5 = 15$ янзаар (a, b) хосыг бүрдүүлж болох тул ном ба дэвтрийг 15 янзаа сонгон авч болно.

14.13. Нийт $C_5^3 = 10$ янзаар 3 орой сонгож болох бөгөөд эдгээрийн нэг нь гурвалжин үүсгэхгүй тул $10 - 1 = 9$ гурвалжин байна.

14.14. Дөрвөн хүүг C_{20}^4 янзаар сонгож болох бөгөөд тухай бүрт нь хоёр охиныг нь C_{10}^2 янзаар сонгож болох тул $C_{20}^4 C_{10}^2$ байна.

14.15. Дурын хоёр сурагч сонгон авах бүрд яг нэг өрөг харгалзах тул

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot (10 - 1)}{2} = 45$$

өрөг гарна.

14.16. 10-д хуваагдах тул 0 цифр заавал орох ёстой. Цифрүүд нь буурах эрэмбээр байрлах ёстой тул цифр давтагдахгүй. Үлдэх 4 цифрийг C_9^4 янзаар сонгох ба эдгээр цифрүүдийг 0-тэй нийлүүлээд цор ганц аргаар буурах эрэмбээр байрлуулж болно. Мэдээд 0 цифр хамгийн сүүлийн байранд байрлах тул 10-д хуваагдах тоонууд байна. Иймд зөв хариулт нь C_9^4 .

14.17. Хамгийн дээд талын өнгийг 3 янзаар, хоёр дахийг 2 янзаар, гурав дахь нь үлдсэн өнгө нь байх тул $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ янзаар хөндлөн судалтай далбаа хийж болно.

14.18. Бидний олох тоо нь $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ цифрүүдээс 3-ийг нь нэг эгнээнд жагсааж бичих боломжийн тоо буюу

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

байна.

14.19. Эхний сурагчийг 20 янзаар, хоёр дахийг 19 янзаар, гурав дахийг 18 янзаар, дөрөв дэхийг 17 янзаар, тав дахийг 16 янзаар суулгаж чадна. Иймд $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = A_{20}^5 = 5!C_{20}^5$.

Санамж: Үүнийг 20 сандалаас 5 сурагчид суудал сонгох гэж үзээд шууд A_{20}^5 гэж бодож болно. Сурагчид ялгаатай тул суудал сонголт нь эрэмбэтэй байна. Өөрөөр хэлбэл Бат 1-р сандал дээр, Дорж 2-р сандал дээр суух нь Бат 2-р сандал дээр, Дорж 1-р сандал дээр суухаас ялгаатай байна.

14.20. 3 төрлийн цэцгээс 5-ийг сонгох тул $C_{(3)}^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5$ байна.

14.21. Нийт 5 оронтой тоонуудын тоо $99999 - 9999 = 9 \cdot 10^4$ байна. Эдгээрийн урд эхний цифрийг нь бичвэл бодлогын нөхцөлийг хангах тоо үүсэх бөгөөд эдгээрээс өөр тоо байж болохгүй нь ойлгомжтой юм.

Энэ бодлогыг өөрөөр

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

байх 6-тийн тоог тоолж бодож болно. a_1 -ийг 0-ээс ялгаатай байхаар 9 янзаар, a_2 -ийг a_1 -тэй тэнцүү байхаар цор ганц аргаар, бусдийг нь тус бүр 10 янзаар сонгож болох тул ийм 6-тийн тоо нь

$$9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4$$

байна.

14.22. МАТЕМАТИК үгэнд М үсэг 2 удаа, А үсэг 2 удаа, Т үсэг 2 удаа, Е үсэг 1 удаа, И үсэг 1, К үсэг 1 удаа орсон тул 2, 2, 2, 1, 1, 1 бүтэцтэй давталттай сэлгэмэлийн тоог олно.

$$P(2, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{(2+2+2+1+1+1)!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9!}{8} = 45360$$

14.23. Нийт боломжийн тоо нь $P(3, 1, 1) = \frac{(3+1+1)!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5!}{3!} = 20$. Үүнээс гурван Э үсэг

зэрэгцэж орсон нь $P(1, 1, 1) = \frac{(1+1+1)!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$ тул бидний олох боломжийн тоо $20 - 6 = 14$ байна.

14.24. Цифр бүр нэгж, аравт, зуутын оронд тус бүр 100 удаа орно. Жишээ нь $\overline{ab1}$ хэлбэрийн тооны хувьд a, b нь тус бүрдээ 10, 10 боломжтой тул нийт $10 \cdot 10 = 100$ боломж байна ($0a1$ -г $\overline{a1}$ гэж үзнэ). Иймд цифр 300 удаа орох тул эдгээр тоонуудын цифрүүдийн нийлбэр нь

$$300(0+1+2+\dots+9) = 300 \cdot 45 = 13500$$

байна.

14.25. Дан бодтой байхын тулд зөвхөн адуу, үхэр, тэмээ буюу 3 төрлийн малтай байна. Иймд $C_{(3)}^{10} = C_{3+10-1}^{10} = C_{12}^{10} = 66$.

Нийт боломжийн тоо $C_{(5)}^{10}$, нэг ч адуугүй байх боломжийн тоо $C_{(4)}^{10}$ тул ядаж нэг адуутай байх боломжийн тоо

$$C_{(5)}^{10} - C_{(4)}^{10} = C_{5+10-1}^{10} - C_{4+10-1}^{10} = C_{14}^{10} - C_{13}^{10} = 715.$$

Яг гурван хоньтой бол үлдэх 7 нь 4 төрлийнх байх тул

$$C_{(4)}^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = 120$$

байна.

15. Магадлал, Статистик 1

15.1. Мэдээж шидсэн чулуу татах хүчний нөлөөгөөр эргэж унах ёстой тул гарцаагүй үзэгдэл байна.

15.2.

1. B, D, F дүн авах нь A дүн авах ба C дүн авах үзэгдлүүдийн алинд ч орохгүй тул эсрэг үзэгдлүүд байж чадахгүй.
2. B -ээс их дүн авах ба C -ээс их дүн авах үзэгдэлд агуулагдах ба эдгээрийн алинд ордоггүй D, F дүн авах боломжууд байгаа тул эсрэг үзэгдлүүд байж чадахгүй.
3. Эсрэг үзэгдлүүд байж чадна.
4. Тэгш өнцөгт гурвалжин эдгээрийн алинд орохгүй.
5. 1 нь натурал тоо бөгөөд анхны ч тоо биш, зохиомол ч тоо биш юм.

15.3. Тус бүрдээ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ магадлалтайгаар 3-аас ихгүй тоогоор буух бөгөөд хоёулаа зэрэг 3-аас ихгүй байх үзэгдэлийн магадлал нь $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ байна. Эсрэг үзэгдэл буюу ядаж 1 нь 3-аас их тоогоор буух үзэгдлийн магадлал нь $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ байна.

15.4. Нийцгүй үзэгдлүүд тул эдгээр үзэгдлийн ядаж нэг нь явагдах магадлал нь магадлалуудын нийлбэртэй тэнцүү байна. Иймд

$$0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.25 = 0.85$$

15.5.

$$|M \cup A| = |M| + |A| - |M \cap A| = 10 + 8 - 5 = 13$$

тул $|\overline{M \cup A}| = 20 - 13 = 7$ байна. Иймд санамсаргүйгээр сонгосон нэг сурагч ямар нэг дугуйланд явдаггүй байх магадлал $\frac{7}{20}$.

15.6. A нь 1-р довтлогч цохиолтоо алдах үзэгдэлд; B_1, B_2 нь 2-р довтлогч эхний ба удаах цохилтоо алдсан байх үзэгдэлүүд байг. Тэгвэл эдгээр нь хамаарахгүй үзэгдлүүд гэж үзэж болох тул бидний олох магадлал

$$P(AB_1B_2) = P(A)P(B_1)P(B_2) = (1 - 0.2)(1 - 0.3)(1 - 0.3) = 0.8 \cdot 0.7^2 = 0.392$$

15.7. $a_n = 26 \cdot n = 988 \Rightarrow n = \frac{988}{26} = 38$ байна. Нийт 1000 тоо байгаа тул тэдгээрийг нэгийг нь сонгоход 13-т хуваагдах тэгш тоо байх магадлал нь $\frac{38}{1000} = 0.038$ байна.

15.8. Хоёр ялгаатай тоо сонгон авах боломжийн тоо $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$. Дараалсан хоёр тоо байх боломжууд нь

$$\{1, 2\}; \{2, 3\}; \{3, 4\}; \dots; \{9, 10\}$$

гэсэн 9 боломж бий. Иймд магадлал нь $\frac{9}{45} = 0.2$ байна.

15.9. $P = \frac{\text{Ивээдэг эгэл үзэгдлийн тоо}}{\text{Нийт эгэл үзэгдлийн тоо}} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

15.10. Яг нэг нь гологдол байх боломжийн тоо нь 1 ш гологдол, 2 ш хэвийн бүтээгдэхүүнээс тогтох тул

$$C_3^1 \cdot C_9^2 = 3C_9^2$$

боломжтой. Нийт боломжийн тоо C_{12}^3 тул бидний олох магадлал $\frac{3C_9^2}{C_{12}^3}$ -тэй тэнцүү байна.

15.11. 5 цифр орсон тоонууд нь 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, ..., 59, 65, 75, 85, 95 буюу нийт 19 ширхэг байгаа. Иймд санамсаргүйгээр сонгосон билетийн дугаарт 5 цифр орсон байх магадлал $\frac{19}{100}$ байна.

15.12. $a - b = 21$, $a - b = 22$, ..., $a - b = 99$ байх хосуудын тоог тоолъё. $a - b = 21$ байх хосууд нь $(a; b) = (22; 1), (23; 2), \dots, (100, 79)$ тул 79 ширхэг байна. Үүнтэй ижлээр $a - b = 22$ байх хосын тоо 78, $a - b = 23$ байх хосын тоо 77 гэх мэтчилэн $a - b = 99$ байх хос нь $(100; 1)$ буюу 1 ширхэг байх тул $a - b > 21$ байх хосын тоо

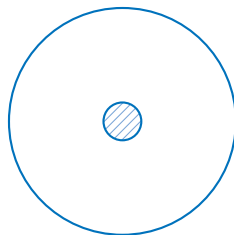
$$1 + 2 + \dots + 79 = \frac{1 + 79}{2} \cdot 79 = 3160$$

ба нийт хосын тоо $C_{100}^2 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$ тул бидний олох магадлал $\frac{3160}{4950} = \frac{316}{495}$ байна.

15.13. Будагдсан хэсгийн талбай нийт талбайн хагас тул $\frac{1}{2}S$ байна. Бид геометр магадлал бодох ёстой тул $P = \frac{\frac{1}{2}S}{S} = \frac{1}{2}$. Үүнийг өөрөөр будагдсан ба будагдаагүй хэсэгт унах магадлал ижил ба нийлбэр нь 1 тул тус бүрдээ $\frac{1}{2}$ магадлалтай гэж бодож болно.

15.14. Нэгж радиустай дугуйн талбай π байна. Дугуйн төвөөс $\frac{1}{6}$ -ээс бага зайд байх цэгүүдийн геометр байр нь $\frac{1}{6}$ радиустай төв нь дугуйн төвтэй давхцах дугуй байна.

$$P = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{6}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{36}$$



15.15. Эхэлж улаан бөмбөг гарч ирэх үзэгдлийг A , хоёр дахь бөмбөг нь хөх байх үзэгдлийг B гэе. $P(A) = \frac{5}{9}$, $P_A(B) = \frac{4}{8}$ тул

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

байна.

15.16. Цагаан уутнаас улаан бөмбөг улаан уутанд хийсэн байх эгэл үзэгдлийн тоо $4 \cdot 7 = 28$. Эдгээрээс хамгийн сүүлд улаан бөмбөг гарсан байх нь $4 \cdot 3 = 12$. Цагаан уутнаас хөх бөмбөг улаан уутанд хийсэн байх эгэл үзэгдлийн тоо $3 \cdot 7 = 21$. Эдгээрээс хамгийн сүүлд улаан бөмбөг гарсан байх нь $3 \cdot 2 = 6$ байна. Иймд нийт эгэл үзэгдлийн тоо $28 + 21 = 49$ ба эдгээрээс $12 + 6 = 18$ -д нь улаан уутнаас улаан бөмбөг гарч ирэх үзэгдэл тул магадлал нь $\frac{18}{49}$ байна.

Нэмэлт: Үүнийг бүтэн магадлалын томъёо ашиглан:

$$P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{18}{49}$$

гэж бодож болох ба эдгээр бодолтууд нь үнэн чанартай нэг бодолт юм.

15.17. A - сонгогдсон харваач 2 удаа харвахад сум байг оноогүй байх үзэгдэл, B_i - i -р харваач харвасан байх үзэгдэл. Тэгвэл

$$P(A|B_1) = (1 - 0.3)^2 = 0.7^2 = 0.49$$

$$P(A|B_2) = (1 - 0.5)^2 = 0.5^2 = 0.25$$

$$P(A|B_3) = (1 - 0.8)^2 = 0.2^2 = 0.04$$

ба $P(B_k) = \frac{1}{3}$ байна. Иймд бидний олох магадлал

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.49}{\frac{1}{3} \cdot 0.49 + \frac{1}{3} \cdot 0.25 + \frac{1}{3} \cdot 0.04} = \frac{0.49}{0.78} = \frac{49}{78} \end{aligned}$$

15.18.

$A = \{\text{таамгаар сонгон авсан эдлэл гологдол байх}\}$

$B_i = \{\text{энэ эдлэлийг } k\text{-р машин үйлдвэрлэсэн байх}\}$

үзэгдлүүд бол B_1, B_2, B_3 үзэгдлүүд нь хос хосоороо нийцгүй ба нийлээд A үзэгдлийг агуулна. Иймээс бүтэн магадлалын томъёо ашиглаж бодъё. Бодлогын нөхцөл ёсоор

$$P(B_1) = 0.30, P(B_2) = 0.25, P(B_3) = 0.45$$

ба

$$P(A|B_1) = 0.02, P(A|B_2) = 0.01, P(A|B_3) = 0.03$$

тул

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) \\ &= 0.30 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.45 \cdot 0.03 = 0.022 \end{aligned}$$

15.19. A улаан уутнаас 2 бөмбөг авах үзэгдэл, B хөх уутнаас 2 бөмбөг авах үзэгдэл. C нь гарч ирсэн хоёр бөмбөг хоёулаа улаан байх үзэгдэл гэвэл $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,

$$P_A(C) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}, P_B(C) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} \text{ тул бүтэн магадлалын томъёогоор}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P_A(C) \cdot P(A) + P_B(C) \cdot P(B) \\ &= \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

15.20.

$$E(X) = (-2) \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 = 0.2$$

байна.

15.21. X_n нь шоог n -р удаад орхиход тусах тоо гэвэл X_n -ийн математик дундаж нь

$$EX_n = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Санамсаргүй хувьсагчуудын нийлбэрийн математик дундаж нь тэдгээрийн математик дунджаудын нийлбэр тул

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_{100} = 100 \cdot 3.5 = 350$$

15.22. X санамсаргүй хувьсагчийн математик дундаж нь

$$E(X) = (-2) \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = 0$$

байна.

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2)$$

тул

$$Var(X) = (-2)^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.1 = 1.2$$

15.23.

$$E(X) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9$$

ба

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 = 1.3$$

тул дисперс нь

$$Var(X) = 1.3 - 0.9^2 = 1.3 - 0.81 = 0.49$$

байна. Иймд стандарт хазайлт нь

$$\sigma(X) = \sqrt{0.49} = 0.7$$

байна.

15.24. Бүх боломжит үр дүн нь (1;2), (1;4), (1;6), (1;8), (3;2), (3;4), (3;6), (3;8), (5;2), (5;4), (5;6), (5;8), (7;2), (7;4), (7;6), (7;8), (9;2), (9;4), (9;6), (9;8) гэсэн 20 хос байна. Эдгээрээс А хүн хожих нь (3;2), (5;2), (5;4), (7;2), (7;4), (7;6), (9;2), (9;4), (9;6), (9;8) гэсэн 10 хос юм.

Иймд А хүн хожих магадлал $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ байна.

А хүн хожигдох буюу 0 оноо авах магадлал $\frac{1}{2}$ байх нь ойлгомжтой. 1 оноо аваад хожих боломжгүй тул магадлал нь 0, 3 оноо аваад хожих (3;2) гэсэн 1 боломжтой тул магадлал нь $\frac{1}{20}$, 5 оноо аваад хожих (5;2), (5;4) гэсэн 2 боломжтой тул магадлал нь $\frac{2}{20}$, 7 оноо аваад хожих (7;2), (7;4), (7;6) гэсэн 3 боломжтой тул магадлал нь $\frac{3}{20}$, 9 оноо аваад хожих (9;2), (9;4), (9;6), (9;8) гэсэн 4 боломжтой тул магадлал нь $\frac{4}{20}$ байна. Иймд авах онооны математик дундаж нь

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{20} + 5 \cdot \frac{2}{20} + 7 \cdot \frac{3}{20} + 9 \cdot \frac{4}{20} = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}$$

байна.

15.25.

1. Элдэв талт гурвалжны тоо $C_5^3 = 10$.
2. Хоёр хажуу талыг 5 янзаар суурийг 4 янзаар сонгож болно. Эдгээрээс 8, 8, 16 нь гурвалжны тэнцэтгэл бишээр гурвалжин биш болно. Иймд $5 \cdot 4 - 1 = 19$ ширхэг зөв биш адил хажуут гурвалжин байна.
3. Зөвхөн 16, 8, 8-ээс бусад давталттай хэсэглэл гурвалжин үүсгэх тул

$$C_{(5)}^3 - 1 = C_{5+3-2}^3 - 1 = C_7^3 - 1 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} - 1 = 34$$

ширхэг гурвалжин байна. Эдгээрээс 5 нь зөв гурвалжин тул магадлал нь $\frac{5}{34}$ байна.

16. Магадлал, статистик давтлага 1

16.1. $T = 38 - c$ нь $0, 1, \dots, 38$ байж болох тул нийт $\sum_{T=0}^{38} (T+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 39 = 780$

гурвал байна. Үүнийг давталттай хэсэглэлийн томъёо ашиглаад

$C_{(3)}^{38} = C_{3+38-1}^{38} = C_{40}^{38} = 780$ гэж бодож болно.

16.2.

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 20 + 16 - 3 = 33$$

16.3. $A \cap B$ нь 1000-аас бага 12 ба 18-д зэрэг хуваагдах тоонуудын олонлог тул

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{999}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{18} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{[12, 18]} \right\rfloor \\ &= 83 + 55 - 27 = 111 \end{aligned}$$

байна. Энд 12 ба 18-д зэрэг хуваагдах тоонууд нь $[12, 18] = 36$ тоонд хуваагдах тоонууд болохыг ашиглав.

16.4. Тойрог дээр орших ямар ч гурван цэг нэг шулуун дээр оршихгүй тул гурвалжны орой болно. Иймд нийт C_{2015}^3 ширхэг гурвалжин байна. Дан хөх өнгийн оройтой гурвалжны тоо C_{2012}^3 тул нийт $C_{2015}^3 - C_{2012}^3$ ширхэг ядаж нэг орой нь улаан өнгөтэй гурвалжин байна.

16.5. $c = 11$ бол (a, b) нь $(1, 11); (2, 10); (3, 9); (4, 8); (5, 7); (6, 6)$ гэсэн 6 боломжтой.

$c = 10$ бол (a, b) нь $(3, 10); (4, 9); (5, 8); (6, 7)$ гэсэн 4 боломжтой.

$c = 9$ бол (a, b) нь $(5, 9); (6, 8); (7, 7)$ гэсэн 3 боломжтой.

$c = 8$ бол (a, b) нь $(7, 8); (6, 8)$ гэсэн 1 боломжтой.

$c \leq 7$ бол $a + b + c \leq 3c \leq 21$ тул периметр нь 23 байх боломжгүй. Иймд нийт $6 + 4 + 3 + 1 = 14$ боломжтой.

16.6. Үлдэх хүүхдүүд нь ангийн нийт хүүхдүүдийн олонлогийн дэд олонлог байна. Ангид үлдэх багшийг 2 янзаар сонгож болно. Харин ангид үлдэх хүүхдийн хувьд $2^{20} - 2$ янз байж болно (нийт боломжоос бүх хүүхэд гарах, бүх хүүхэд үлдэх гэсэн 2 боломжийг хасна). Иймд үлдэх хүмүүсийг $2(2^{20} - 2) = 2^{21} - 4$ янзаар сонгоно (бусад нь гарна).

16.7. Бид $\overline{abc0}$, $\overline{ab0c}$, $\overline{a0bc}$ хэлбэрийн ялгаатай цифрүүд бүхий 4 оронтой тоог тоолно. Хувилбар тус бүрд a, b, c цифрүүдийг $A_9^3 = 3! \cdot C_9^3$ янзаар сонгох боломжтой тул нийт $3 \cdot 3! \cdot C_9^3$ ширхэг тоо байна.

16.8. 6 хүүхэд, n морь байсан гэвэл нийт $6n$ ялгаатай аргаар морьтой хүүхдийг сонгоно. Иймд $6n = 48 \Rightarrow n = 8$ байжээ.

16.9. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ тул хуваагчдын тоо нь

$$(3+1)(1+1)(2+1) = 24$$

байна.

16.10. Эхний цифр нь 0 биш учир 9 боломж, дараагийн цифрүүдийг нь өмнөхөөс нь ялгаатай сонгох учир бас 9 боломжтой. Иймд нийт боломж 9^6 байна.

16.11. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{6-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k x^{6-2k}$ тул $6-2k = 0$ байна. Эндээс $k = 3$. Эндээс x -г агуулаагүй гишүүн $C_6^3 \cdot 2^3 = 160$.

16.12. Нийт боломжийн тоо нь $\frac{16!}{5! \cdot 3! \cdot 8!}$ байна. Үүнээс $3!$ -д нь таван У, гурван Н, найман Ц үсэг нь нэг дор байрлах тул магадлал нь

$$\frac{3!}{\frac{16!}{5! \cdot 3! \cdot 8!}} = \frac{(3!)^2 \cdot 5! \cdot 8!}{16!}$$

16.13. Бөмбөгүүд өөр хоорондоо ялгаатай тул хайрцгуудаа бөмбөгүүддээ зориулж сонгоно гэвэл $n+2$ хайрцгаас n -ийг эрэмбэтэйгээр сонгох болно. Иймд

$$A_{n+2}^n = \frac{(n+2)!}{(n+2-n)!} = \frac{(n+2)!}{2}$$

байна.

16.14. $(A, B) \neq (B, A)$ тул эрэмбэтэй хос үүсгэж байна. n элементээс эрэмбэтэйгээр 2-ийг нь сонгох боломжийн тоо A_n^2 байдаг.

16.15. Хөвгүүдээ эхлээд жагсаавал $4!$ өөр жагсаал үүсэх боломжтой. Эдгээр жагсаал бүрийн яг голд нь гурван охиноо $3!$ янзаар жагсаах боломжтой тул нийт $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ янзаар жагсаж болно.

16.16. Болд Цэцэг буюу БЦ гэж орсон жагсаалд энэ хоёрыг нэг хүн гэж үзэж болох тул нийт $23!$ боломж бий. Яг үүнтэй адил ЦБ нь $23!$ тул Болдын хүсэлд нийцэхээр нийт $2 \cdot 23!$ янзаар жагсан явж болно.

16.17. Гурван ялгаатай цифрийг C_{10}^3 янзаар сонгож болох ба тэдгээрийн нэг эгнээнд $3!$ янзаар бичиж болно. Иймд ялгаатай цифрүүдээс тогтох нийт (a, b, c) гуравтуудын тоо $3!C_{10}^3$ байна.

0-ээс ялгаатай 2 цифрийг C_9^2 янзаар сонгох ба $2!$ янзаар байрыг нь сольж бичиж болно. Иймд b, c нь $b \neq c$ ба 0-ээс ялгаатай байх $(0, b, c)$ гуравтын тоо $2!C_9^2$ байна.

Эдгээрийн ялгавар нь бидний олох тоо тул зөв хариулт нь $3!C_{10}^3 - 2!C_9^2$ болов.

16.18. 20 ижил бөмбөгийг 3 ялгаатай хайрцагт хувааж хийх боломжийн тоо нь 3 ялгаатай хайрцагнаас 20 ширхэг бөмбөг гаргахтай ижил байна.

Энэ нь 3 төрлийн зүйлээс 20-ийг авах боломжийн тоо буюу $C_{(3)}^{20}$ болно.

16.19. Заавар ёсоор бидний олох тоо нь

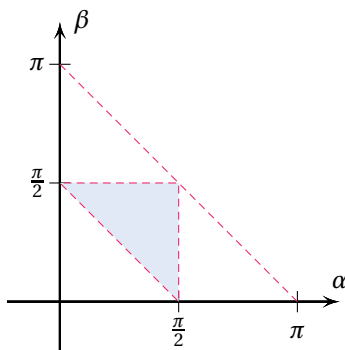
$$C_{(n+1)}^2 = C_{n+1+2-1}^2 = C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)!}{n! \cdot 2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

16.20. Давтамжийн хүснэгт байгуулбал

Утга	Давтамж
994	1
997	3
998	1
999	1
1000	1
1001	1
1007	1

Эдгээрээс 997 хамгийн олон буюу 3 удаа давтагдаж байгаа тул түүврийн моод нь 997 юм.

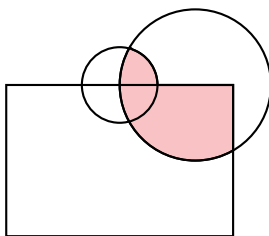
16.21. α, β хавтгайд α, β, γ өнцгүүд бүхий гурвалжин хурц өнцөгт байх муж буюу $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta$ тэнцэтгэл бишийн шийдийн муж нь нийт боломжит утгын $\frac{1}{4}$ хэсэг болох нь харагдаж байна.



Иймд дурын сонгож авсан гурвалжин хурц өнцөгт гурвалжин байх магадлал нь $\frac{1}{4}$ ажээ.

16.22. Жижиг тойрог ба том тойргийн доторх хэсэг нь $A \cap B$, тэгш өнцөг ба том тойргийн

доторх хэсэг нь $C \cap B$ тул будагдсан хэсэг нь $(A \cap B) \cup (C \cap B) = (A \cup C) \cap B$ байна.



16.23. Нийт боломжит үзэгдлийн тоо нь C_{100}^5 , үүнээс сонгодсон 5 бүтээгдэхүүн бүгд гологдол биш байх магадлал нь C_{95}^5 тул магадлал нь $\frac{C_{95}^5}{C_{100}^5}$ байна. Эсрэг үзэгдлүүдийн магадлалын нийлбэр 1 тул ядаж нэг гологдол илрэх буюу хэсэг буцаагдах магадлал

$$1 - \frac{C_{95}^5}{C_{100}^5}$$

байна.

16.24. $C_5^k (\sqrt[3]{3})^{5-k} (\sqrt{2})^k$ тоо рационал бол $5-k$ нь 3-д, k нь 2-д тус тус хуваагдах ёстой. Иймд $k=2$ байна. Иймд биномын рационал гишүүн нь

$$C_5^2 (\sqrt[3]{3})^3 (\sqrt{2})^2 = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$$

байна.

16.25. Нийт $3+4+5=12$ бөмбөг байгаа эдгээрээс

1. Цагаан байх 3 боломж байгаа тул магадлал нь $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ байна. Иймд цагаан биш байх магадлал нь $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ байна.

2. Хар байх 3 боломж байгаа тул магадлал нь $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ байна. Иймд хар биш байх магадлал нь $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ байна.

3. Улаан байх 5 боломж байгаа тул магадлал нь $\frac{5}{12}$ байна. Иймд улаан биш байх магадлал нь $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ байна.

17. Комплекс тоо 1

17.1.

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= i^{2017} \cdot i^{2018} = i^{2017+2018} = i^{4035} \\
 &= i^{4 \cdot 1008 + 3} = (i^4)^{1008} \cdot i^3 = 1^{1008} \cdot i^3 \\
 &= 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i
 \end{aligned}$$

17.2.

$$\begin{aligned}
 3A + 2B - C &= 3(3 + i) + 2(4i - 3) - (-2 - 2i) \\
 &= 9 + 3i + 8i - 6 - (-2) - (-2i) \\
 &= (9 - 6 - (-2)) + (3 + 8 - (-2))i \\
 &= 5 + 13i
 \end{aligned}$$

17.3.

$$z^2 = (1 + i)^2 = (1^2 - 1^2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot i = 2i$$

тул

$$z^2 + z + 1 = 2i + (1 + i) + 1 = 2 + 3i$$

17.4.

$$\begin{aligned}
 (3 + i)(4 - i) &= (3 + 1 \cdot i)(4 + (-1)i) \\
 &= (3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1)) + (3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4)i \\
 &= 13 + i
 \end{aligned}$$

ба

$$\begin{aligned}
 (3 - i)(4 + i) &= (3 + (-1) \cdot i)(4 + 1 \cdot i) \\
 &= (3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + (3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4)i \\
 &= 13 - i
 \end{aligned}$$

тул

$$(3 + i)(4 - i) + (3 - i)(4 + i) = (13 + i) + (13 - i) = 26$$

17.5. $(1 + 2i)x - (2 - i)y = 3$ тул $(x - 2y) + (2x + y)i = 3 + 0 \cdot i$ байна. Иймд комплекс тоонууд тэнцэх нөхцөл ёсоор

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x$$

тул $x - 2 \cdot (-2x) = 5x = 3$ буюу $x = \frac{3}{5} = 0.6$ болно. Иймд $y = -2x = -2 \cdot 0.6 = -1.2$.

17.6. $x^2 - 2x + 10 = 0$ тэгшитгэлийн $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 < 0$ тул шийдүүд нь

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-(-36)} \cdot i}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot i}{2} = 1 \pm 3i$$

байна.

17.7.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{i}{1+2i} - \frac{1}{2-i} \\
 &= \frac{i(1-2i)}{1^2+2^2} - \frac{2+i}{2^2+(-1)^2} \\
 &= \frac{2+i}{5} - \frac{2+i}{5} = 0
 \end{aligned}$$

17.8.

$$|12-5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

17.9. $z^2 - 3z + 9 = 0 \Rightarrow \overline{z^2 - 3z + 9} = \overline{z}^2 - 3\overline{z} + 9 = 0$ буюу z ба $\overline{z}$ тоонууд

$$x^2 - 3x + 9 = 0$$

квадрат тэгшитгэлийн шийдүүд болно. Иймд Виетийн теоремоор $z \cdot \overline{z} = 9$ тул $|\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = 3$ болов.

17.10. $z = a + bi$ гэвэл $z(2-i) + \overline{z} = 1 \Rightarrow (a+bi)(2-i) + a-bi = 1$ болно. Эндээс

$$(2a+b) + (2b-a)i + a-bi = (3a+b) + (b-a)i = 1$$

тул

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ b-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=\frac{1}{4}$$

байна. Иймд $z = \frac{1+i}{4}$.17.11. $z = 4 + 3i$ тул $Im z = 3$ байна. Иймд C сонголт худал юм.17.12. $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arctg \frac{2}{2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ тул

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

17.13.

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ} \\
 &= \cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ) \\
 &= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ
 \end{aligned}$$

тул

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^3 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^3 = \cos(3 \cdot 60^\circ) + i \sin(3 \cdot 60^\circ) = -1$$

17.14. $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i$ шийдтэй квадрат тэгшитгэл нь Виетийн теорем ёсоор

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2 + i + 2 - i)x + (2 + i)(2 - i) = 0$$

тул $x^2 - 4x + 5 = 0$ байна.

17.15. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ тул

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

ба

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

17.16. $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ тул

$$\begin{aligned}(1 + i)^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \cdot (\cos(20 \cdot 45^\circ) + i \sin(20 \cdot 45^\circ)) \\ &= 2^{10}(\cos 900^\circ + i \sin 900^\circ) = -2^{10}\end{aligned}$$

17.17.

$$\begin{aligned}1 + \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot i \\ &= 2 \cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha) = 2 \cos \alpha \cdot e^{i\alpha}\end{aligned}$$

17.18.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

ба $z - 1 \neq 0$ тул $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z^2 + z = -1$ байна.

17.19.

$$z^2 = -i = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$$

тул

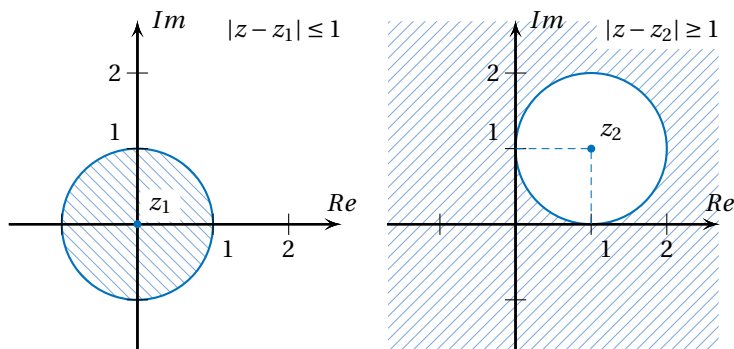
$$z = \cos \frac{270^\circ + 360^\circ \cdot k}{2} + i \sin \frac{270^\circ + 360^\circ \cdot k}{2}, \quad k = 0, 1$$

байна. Эндээс $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$, $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$ болохыг тооцвол

$$z = \pm(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

байна.

17.20.



$z_1 = 0, z_2 = 1 + i$ цэгүүдийн хувьд $|z - z_1| \leq 1$ ба $|z - z_2| \geq 1$ байх z цэгүүдийн олонлог (шийдүүдийн огтлолцол) бодлогод өгсөн мужийн цэгүүд болох нь харагдаж байна. Иймд $|z| \leq 1, |z - 1 - i| \geq 1$ байна.

17.21. $2x^{10} + 3x^2 + 1 = (x - i)(x + i)Q(x) + ax + b$ тул Безугийн теоремоор

$$2i^{10} + 3i^2 + 1 = -4 = a \cdot i + b$$

ба

$$2(-i)^{10} + 3(-i)^2 + 1 = -4 = a \cdot (-i) + b$$

байна. Эндээс $a = 0, b = -4$ тул үлдэгдэл нь -4 байна.

17.22. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ тул

$$z \cdot \bar{z} + 4|z| = 5 \Leftrightarrow |z|^2 + 4|z| = 5$$

байна. $t = |z|$ гэвэл $t^2 + 4t - 5 = 0$ тул $t = 1$ эсвэл $t = -5$ болно. Нөгөө талаас $|z| \geq 0$ тул $|z| = 1$. Энэ нь координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай тойргийн цэгүүд ба эдгээр нь анхны тэгшитгэлийн шийд болох тул тэгшитгэл төгсгөлгүй олон шийдтэй.

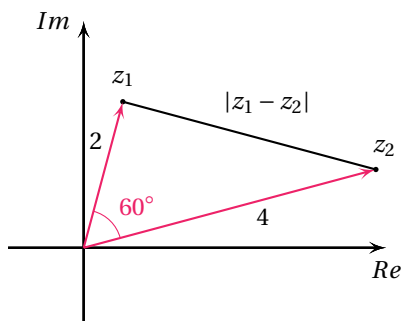
17.23.

$$\sum_{n=0}^{2018} i^n = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2018} = \frac{i^{2019} - 1}{i - 1} = \frac{i^3 - 1}{i - 1} = i^2 + i + 1 = i$$

17.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + i \cdot i & 1 \cdot (-i) + i \cdot 1 \\ (-i) \cdot 1 + 1 \cdot i & (-i) \cdot (-i) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17.25.



Косинусын теорем ашиглавал

$$|z_1 - z_2|^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 12$$

тул $|z_1 - z_2| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ байна.

18. Матриц 1

18.1. А матрицад нь 3 мөр 2 багана байхгүй тул $a_{32} = 6$ худал юм.

18.2. Матрицын мөрүүдийг нэмбэл $2x = 13, 2u = 3$ болно. Эдгээрийн ялгавар нь $2(x - u) = 10$ тул $x - u = 5$ байна.

18.3. $\begin{pmatrix} y-15 \\ 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ x \end{pmatrix}$ тул 2 матриц тэнцэх нөхцөлөөр

$$\begin{cases} y-15=3x \\ 2y=x \end{cases} \Rightarrow y-15=3 \cdot (2y)=6y$$

тул $5y = -15$ буюу $y = -3$ байна. Иймд $x = 2y = -6$ байна.

18.4.

$$\begin{aligned} 3A + (2B - A) - 4C &= 2A + 2B - 4C \\ &= 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 20 & -28 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2+2-0 & 0+8-8 \\ 8+4-20 & 0+10+28 \\ 2+6-0 & 6+12-36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 38 \\ 8 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

18.5.

$$-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

18.6.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & a+1 \\ -a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a+1 \\ -a & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + (a+1) \cdot (-a) & a(a+1) + (a+1)(-a) \\ -a^2 + (-a)^2 & -a(a+1) + (-a)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

болно. $-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ тул

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

буюу $a = 1$ байна.

18.7. Заавар ёсоор

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+1z=5 \\ 1x+2y+(-2)z=1 \\ 2x+(-1)y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

байна.

18.8.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$$

18.9.

$$\begin{aligned}
 \text{Үржвэр} &= (x \quad y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= (x \cdot a + y \cdot h \quad x \cdot h + y \cdot b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= (ax + hy \quad hx + by) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= ((ax + hy) \cdot x + (hx + by) \cdot y) \\
 &= (ax^2 + 2hxy + by^2)
 \end{aligned}$$

тул үржвэрийн цор ганц элемент нь $ax^2 + 2hxy + by^2$ ажээ.

18.10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 - 2 \cdot 1 & 5 - 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 3 \\ 7 - 1 \cdot 4 & 8 - 1 \cdot 5 & 9 - 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

18.11.

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
 BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

тул

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5 & 0 - 0 \\ 2 - 6 & 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

18.12.

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ба $A^3 = A^2 \cdot A$ тул

$$\begin{aligned}
 A^3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ -2 & 12 & -10 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

байна.

18.13.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+3y=3 \\ x-y+3z=10 \end{cases}$$

байна. Тэгшитгэлүүдийг нэмбэл $4x+4y+4z=16$ тул $x+y+z=4$ болно.

18.14. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - 9 \cdot 2 = 30 - 18 = 12$ байна.

18.15.

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7 \cdot 10 - 12 \cdot 5} \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

18.16. Урвуугүй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тодорхойлогч нь 0 тул

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x) \cdot (1-x) - 3 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

буюу

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

байна. Иймд $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ байна.

18.17. $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7 \cdot 7 - 8 \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ тул

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \cdot 3 + (-8) \cdot 7 & 7 \cdot (-4) + (-8) \cdot (-2) \\ -6 \cdot 3 + 7 \cdot 7 & -6 \cdot (-4) + 7 \cdot (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -35 & -12 \\ 31 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

байна.

18.18. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ тул

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

байна.

18.19. (x, y) цэг (x', y') цэгт буух бол

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

буюу (x, y) цэг $(-x, y)$ цэгт бууна. Энэ нь Oy тэнхлэгийн хувьд дахь тэнхлэгийн тэгш хэм юм.

18.20. Хувиргалтын матрицыг A гэвэл

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) \\ \sin \alpha & \sin(90^\circ + \alpha) \end{pmatrix}$$

байна. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ нь нэгж матриц ба эмхэтгэлийн томьёо тооцвол

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

байна.

18.21.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

18.22.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 7 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot 8) - \\ - (-1 \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 4) = -18 - (-27) = 9$$

18.23. $A(1, 2); B(4, 3)$ цэгүүдийг дайрсан шулууны тэгшитгэл нь

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

байна.

18.24. $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 6 - (-5) \cdot (-7)} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ тул

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-7z \\ 1+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (3-7z) + 5 \cdot (1+z) \\ 7 \cdot (3-7z) + 6 \cdot (1+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23-37z \\ 27-42z \end{pmatrix}$$

байна. Иймд тэгшитгэлийн ерөнхий шийд $(x, y, z) = (23-37z, 27-42z, z)$ байна.

18.25. A^2, A, E матрицуудын хамаарал ёсоор

$$A^2 - (-1+3)A + ((-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-2))E = 0$$

буюу

$$A^2 - 2A + E = 0$$

болно.

$$x^n = (x^2 - 2x + 1)Q(x) + ax + b = (x - 1)^2 Q(x) + ax + b$$

гэвэл уламжлал нь

$$nx^{n-1} = 2(x - 1)Q(x) + (x - 1)^2 Q'(x) + a$$

байна. Эдгээрт $x = 1$ утгыг орлуулж бодвол $1 = a + b$, $n = a$ болно. Иймд $b = 1 - n$ буюу

$$x^n = (x^2 - 2x + 1)Q(x) + ax + b = (x^2 - 2x + 1)Q(x) + nx + (1 - n)$$

болно. Тухайн тохиолдолд $x^{10} = (x^2 - 2x + 1)Q(x) + 10x - 9$ тул

$$A^{10} = (A^2 - 2A + E)Q(A) + 10A - 9E$$

тул

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ -20 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 20 \\ -20 & 21 \end{pmatrix}$$

19. Математик анализийн нэмэлт 1

19.1.

$$S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

19.2.

$$S = \frac{-\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = -1$$

19.3. Төгсгөлгүй буурах геометр прогрессийн нийлбэр олох томъёо ёсоор

$$0.(143) = 0.143 + 0.143 \cdot 0.001 + 0.143 \cdot 0.001^2 + \dots = \frac{0.143}{1 - 0.001} = \frac{0.143}{0.999} = \frac{143}{999}$$

тул $7.(143) = 7\frac{143}{999}$ байна.

19.4.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (i \cdot j^2) &= \sum_{i=1}^3 \left(i \sum_{j=1}^2 j^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^2 j^2 \right) i \\ &= \sum_{j=1}^2 j^2 \cdot \sum_{i=1}^3 i \\ &= (1^2 + 2^2) \cdot (1 + 2 + 3) \\ &= 5 \cdot 6 = 30 \end{aligned}$$

19.5.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot 101} = \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{100}\right) - \frac{1}{101} = \\
 &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}
 \end{aligned}$$

байна.

19.6. I цувааны хэсгийн нийлбэрүүд нь $-1, 0, -1, 0, \dots$ тул нийлэхгүй.

II цувааны хувьд $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ хэсгийн нийлбэр нь 1 рүү нийлнэ.

III цуваа нь төгсгөлгүй өсөх тул нийлэхгүй.

IV цувааны хувьд $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln n$ тул мөн төгсгөлгүй өснө. Иймд нийлэхгүй.

V цуваа нь төгсгөлгүй буурах геометр прогрессийн нийлбэр тул $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ байна.

19.7.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_3 = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{1}{16}$$

19.8.

$$\begin{aligned}
 \frac{3+x}{x^2-3x+2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \\
 &= \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
 &= \frac{(A+B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}
 \end{aligned}$$

тул $A+B=1$, $-2A-B=3$ буюу $A=-4$, $B=5$ байна. Иймд

$$\begin{aligned}
 \frac{3+x}{x^2-3x+2} &= \frac{-4}{x-1} + \frac{5}{x-2} = \frac{4}{1-x} - \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{x}{2}} \\
 &= 4(1+x+x^2+x^3+\cdots) - \frac{5}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots\right)
 \end{aligned}$$

байна. Задаргааны x^3 -ийн өмнөх коэффициент нь $4 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{59}{16}$ байна.

19.9. $A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$ гэвэл

$$\begin{aligned}(1-x)A(x) &= (1-x)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots) \\ &= (1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots) - (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots) \\ &= 1 + (2-1)x + (3-2)x^2 + \dots + (n+1-n)x^n + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \\ &= \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

тул $A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ байна.

19.10.

$$(1-ax)^{-3} = 1 + \binom{-3}{1}(-ax) + \binom{-3}{2}(-ax)^2 + \binom{-3}{3}(-ax)^3 + \dots + \binom{-3}{n}(-ax)^n + \dots$$

тул

$$\binom{-3}{3}(-a^3) = 2160 \Leftrightarrow -\frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!} \times a^3 = 10a^3 = 2160$$

байна. Эндээс $a^3 = 216$ буюу $a = 6$ байна.

19.11.

$$[(4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2} \cdot (4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (4x^2 + 1)' = 4x(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

19.12. Тэгшитгэлийн хоёр талыг дифференциалчилбал

$$2x + 3y^2 y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y^2}$$

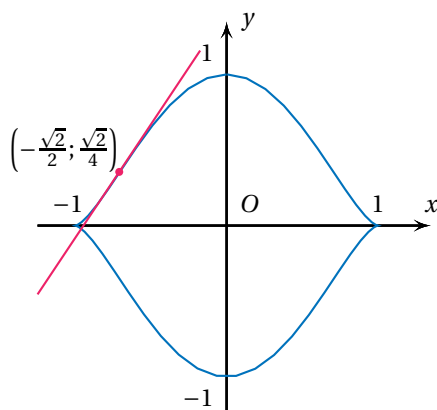
19.13. $\frac{dy}{dt} = 3\cos^2 t \cdot \sin t$, $\frac{dx}{dt} = \cos t$ тул

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos^2 t \sin t}{\cos t} = 3\cos t \sin t$$

байна. Иймд $t = \frac{\pi}{4}$ цэг дээрх налалт нь

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = 3\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$$

байна.



19.14.

$$2yy' + 2y'x^2 + 2y \cdot 2x + 4 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2xy + 2}{y + x^2}$$

тул $xy = -1$ байх цэг дээр экстремум утгатай. Үүнийг $y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0$ тэгшитгэлтэй системлэж бодвол $x = -\frac{1}{y}$ тул

$$y^2 + \frac{2}{y} - \frac{4}{y} - 3 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 3y - 2 = (y + 1)^2(y - 2) = 0$$

болно. Эндээс $y_1 = -1$, $x_1 = 1$ ба $y_2 = 2$, $x_2 = -0.5$ гэсэн шийдүүд гарах тул боловч $(1; -1)$ цэг дээр $y' = -\frac{2xy + 2}{y + x^2}$ налалт тодорхойлогдохгүй. Иймд $(-0.5; 2)$ гэсэн экстремумын цэгтэй.

19.15. $\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 20^\circ) \Rightarrow \frac{d(T(t) - 20^\circ)}{T(t) - 20^\circ} = k dt$ болно. Тэгшитгэлийн хоёр талыг интегралчилж бодвол

$$\ln|T(t) - 20^\circ| = kt + C$$

$T(t) > 20^\circ$ тул $|T(t) - 20^\circ| = T(t) - 20^\circ$ байна. Иймд

$$T(t) = e^{k \cdot t + C} + 20^\circ = \mu e^{k \cdot t} + 20^\circ$$

$T(0) = 150^\circ$ гэдгээс $150^\circ = \mu e^{k \cdot 0} + 20^\circ$ буюу $\mu = 130^\circ$ болно. Түүнчлэн $T(3) = 90^\circ$ тул $90^\circ = 130^\circ \cdot e^{3k} + 20^\circ$ буюу $e^k = \left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{1}{3}}$ байна. Иймд

$$T(t) = 130^\circ \times \left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{t}{3}} + 20^\circ$$

болов.

19.16. t хугацаан дахь цацраг идэвхид бодисын массыг $M(t)$ гр гэвэл $M(0) = 800$, $M(2) = 200$ байна. Түүнчлэн

$$\frac{dM(t)}{dt} = kM(t) \Leftrightarrow \frac{dM(t)}{M(t)} = k dt$$

болно. t хувьсагчаар интегралчилбал

$$\ln M(t) = kt + C \Leftrightarrow M(t) = \mu e^{kt}$$

$M(0) = \mu e^0 = \mu = 800$ тул $M(t) = 800e^{kt}$, $M(2) = 800e^{2k} = 200$ тул $e^k = \sqrt{\frac{200}{800}} = \frac{1}{2}$ байна.

Иймд

$$M(t) = 800e^{kt} = 800(e^k)^t = \frac{800}{2^t}$$

болно. Эндээс $M(4) = \frac{800}{2^4} = 50$ гэж гарч байна.

19.17.

$$y = \int y' dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

19.18. $y'x - y = 0$ тэгшитгэлийн хувьд $y' = c$, $y = cx$ -ийг орлуулбал

$$y'x - y = c \cdot x - cx = 0$$

болж шийд болж байна.

19.19. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ функцийн хувьд

$$y' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$$

ба

$$y'' = -9c_1 \cos 3x - 9c_2 \sin 3x$$

тул

$$y'' + 9y = 0$$

байна.

19.20.

$$yy' = 3 \Rightarrow y dy = 3 dx$$

тэгшитгэлийг интегралчилбал

$$\int y dy = \int 3 dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = 3x + C$$

болно. $x_0 = 6$ үед $y_0 = 10$ тул

$$\frac{10^2}{2} = 3 \cdot 6 + C \Rightarrow C = 50 - 18 = 32$$

байна. Иймд $y^2 = 6x + 64$ байна.

19.21.

$$y' - 2xy - y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (2x + 1) dx$$

тул

$$\int \frac{dy}{y} = \int (2x + 1) dx \Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + x + C_0$$

байна. Эндээс $|y| = e^{x^2+x+C_0}$ байна. $e^{C_0} > 0$ тул $\pm y = e^{C_0} \cdot e^{x^2+x}$ ерөнхий шийдийг $y = Ce^{x^2+x}$ гэж бичиж болно. Энд C нь дурын бодит тоо юм.

19.22. $x^2 + y^2 = 13$ тэгшитгэлийг дифференциалчилбал

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

байна. Иймд (5; 12) цэгт татсан шүргэгчийн налалт нь $-\frac{5}{12}$ байна. Иймд шүргэгчийн тэгшитгэл нь

$$y = -\frac{5}{12}(x-5) + 12 \Leftrightarrow 5x + 12y = 169$$

байна.

19.23. Ижил урттай хэсгүүд тул нийт хэсгийн тоо $\frac{2-1}{0.1} = 10$ байна.

$$\begin{aligned} S_{10} &= \left(\frac{f(y_0) + f(y_1)}{2} + \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} + \dots + \frac{f(y_9) + f(y_{10})}{2} \right) \cdot \Delta x \\ &= (f(y_0) + f(y_1) + \dots + f(y_{10})) \cdot \Delta x - \frac{f(y_0) + f(y_{10})}{2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\text{тул } \frac{[c]}{4} = \frac{f(1) + f(2)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \text{ буюу } [c] = 3 \text{ байна.}$$

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$\frac{1}{x}$	1.0000	0.9090	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

хүснэгт ашиглан S_{10} нийлбэрийг бодвол

$$\begin{aligned} S_{10} &= (1 + 0.909 + 0.8333 + 0.7692 + 0.7143 + 0.6667 + 0.625 + 0.5882 + 0.5556 + 0.5263 + 0.5) \cdot 0.1 - \\ &\quad - \frac{3}{4} \cdot 0.1 = 7.6876 \cdot 0.1 - 0.75 \cdot 0.1 = 6.9376 \cdot 0.1 = 0.69376 \end{aligned}$$

болно. Иймд $\ln 2 \approx 0.69$ байна.

19.24.

$$\begin{aligned} (1-2x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)(-2x)^1 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)(-2x)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)(-2x)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(-2x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-2x)^3 + \dots \\ &= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \dots \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{72} \text{ гэвэл}$$

$$\frac{\sqrt{35}}{6} = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{72} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{72} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{72^3} \approx 0.9860$$

$$\text{тул } \sqrt{35} \approx 6 \cdot 0.9860 = 5.916 \text{ байна.}$$

19.25. $m \frac{dv}{dt} = -kv$ тэгшитгэлийг бодвол $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ гэж гарах ба $v(0) = 2$ анхны нөхцөлийг тооцвол $C = 2$ болно. $v(4) = 1$ тул $2 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 4} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ тул $v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$ байна.

1. $v(t) = 0.25 = 2^{-2} = 2^{1-\frac{t}{4}}$ тул $t = 12$ байна.

2. $S(t) = \int_0^t v(t) dt$ тул

$$S(t) = \int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}} dx = \frac{8}{\ln 2} (1 - 2^{-\frac{t}{4}})$$

ба $t \rightarrow \infty$ үед $S(t) \rightarrow \frac{8}{\ln 2}$ байна.

20. Статистикийн нэмэлт 1

20.1. Завсар тус бүрийн дунджийг олбол

Дундаж	Тавиурын тоо
33	4
38	6
43	10
48	13
53	5
58	2

тул нийт тавиур дээрх номын тооны дундаж нь

$$\frac{33 \cdot 4 + 38 \cdot 6 + 43 \cdot 10 + 48 \cdot 13 + 53 \cdot 5 + 58 \cdot 2}{4 + 6 + 10 + 13 + 5 + 2} = \frac{1795}{40} = 44.875$$

20.2. Байшин бүрийн өндөр харгалзах мужийнхаа хамгийн их утгатай тэнцүү гэж үзвэл

Өндөр h (м)	Давтамж
$h = 90$	6
$h = 95$	3
$h = 100$	4
$h = 120$	7
$h = 145$	5

болох тул байшингуудын өндрийн дундаж нь хамгийн ихдээ

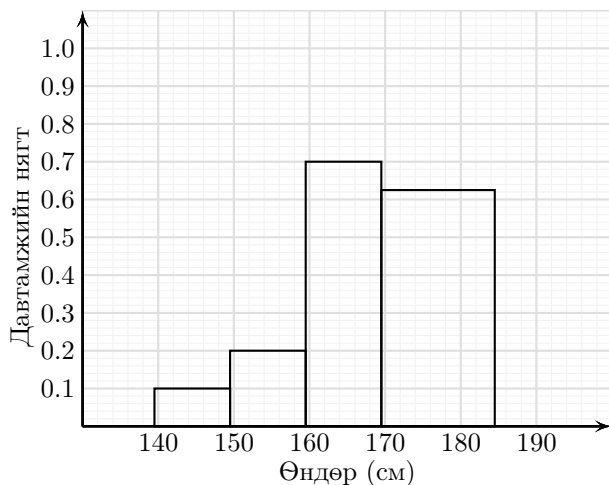
$$\frac{90 \cdot 6 + 95 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 120 \cdot 7 + 145 \cdot 5}{25} = 111.6$$

байна.

20.3. Завсруудаа тасралтгүй завсаруудад хувааж, завсруудын урт болон давтамжийн нягтыг олбол

Завсар	Тасралтгүйн засвар	Завсрын урт	Давтамж	Давтамжийн нягт
140-149	[139.5; 149.5[	10	1	$1 : 10 = 0.1$
150-159	[149.5; 159.5[	10	2	$2 : 10 = 0.2$
160-169	[159.5; 169.5[	10	7	$7 : 10 = 0.7$
170-185	[169.5; 185.5[	16	10	$10 : 16 = 0.625$

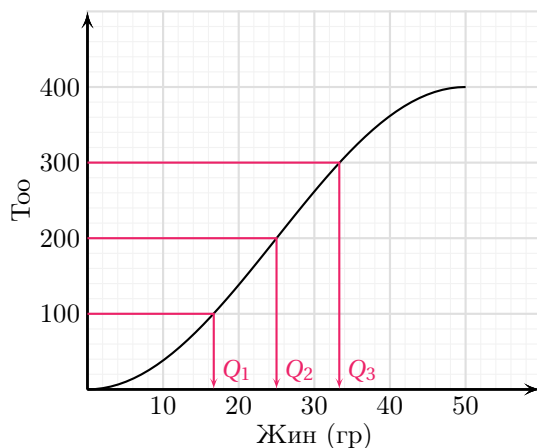
Хүснэгтээ ашиглан гистограмм байгуулбал



Иймд моод бүлэг нь 160-169 бүлэг байна.

20.4. Далайц нь хамгийн их утга ба хамгийн бага утгын зөрөө тул $10 - 1 = 9$ байх ёстой.

20.5.



Диаграммаас харахад медиан буюу $Q_2 = 25$ байна. Доод кватил нь $Q_1 = 16.6$, дээд кватил нь $Q_3 = 33.3$ тул кватил хоорондын далайц нь $Q_3 - Q_1 = 16.7$ байна.

20.6. $E(X) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1.2$ тул

$$Var(x) = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.1 - 1.2^2 = 2.2 - 1.44 = 0.76$$

байна. Иймд $\sigma(X) = \sqrt{0.76} \approx 0.87$ байна.

20.7. 6 хоногийн турш өглөө $6.33 \cdot 6 \approx 38$, өдөр $5.33 \cdot 6 \approx 32$, орой $2.50 \cdot 6 = 15$ нийт

$$38 + 32 + 15 = 85$$

хүн үзүүлжээ.

20.8. A, B харилцан нийцгүй үзэгдлүүд тул

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

байна. Иймд $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.46 - 0.34 = 0.12$ юм.

20.9. A, B үл хамаарах үзэгдлүүд тул

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.36}{0.4} = 0.9$$

байна.

20.10. Эсээ тус бүрийн шаардлага хангасан байх магадлал $100\% - 5\% - 3\% = 92\% = 0.92$ байна. Магадлалууд нь үл хамаарах гэж үзэж болох тул хоёулаа шаардлага хангасан байх магадлал нь $0.92 \cdot 0.92 \approx 0.85$ байна.

20.11. X нь тоглогчийн нэг тоглолтод хожих мөнгөний хэмжээг тэмдэглэх санамсаргүй хувьсагч гэе. Шоо тус бүрийн 6 буух магадлал $\frac{1}{6}$ тул 3 шоо хаяхад нэг ч удаа 6 буухгүй байх магадлал $C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3$, яг нэг ширхэг 6 буух магадлал $C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2$, яг хоёр ширхэг 6 буух магадлал $C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1$, гурван ширхэг 6 буух магадлал $C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0$ байна. Иймд

x	-1000	1000	2000	3000
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

ба

$$E(X) = -1000 \cdot \frac{125}{216} + 1000 \cdot \frac{75}{216} + 2000 \cdot \frac{15}{216} + 3000 \cdot \frac{1}{216} = -\frac{17000}{216}$$

тул 27 тоглолтод дундажаар $\frac{17000}{216} \times 27 = 2125$ төгрөг алдана.

20.12.

$$P(X = 3) = C_4^3 0.3^3 (1 - 0.3)^1 = 0.0756$$

20.13.

$$Var(X) = 10 \cdot 0.4 \cdot (1 - 0.4) = 2.4$$

20.14. $\sigma^2 = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5} = 2.24$ байна. $X \sim N(10, 5)$ тул $z = \frac{x - 10}{\sqrt{5}}$ нь $N(0, 1)$ хэвийн тархалттай байна. Тасралтгүйн засварыг оруулж тооцвол

$$P(7 \leq X \leq 12) = P(6.5 < X < 12.5) = P\left(\frac{6.5 - 10}{2.24} < z < \frac{12.5 - 10}{2.24}\right)$$

буюу

$$P(7 \leq x \leq 13) = P(-1.56 < z < 1.12) = (0.5 + \Phi(1.12)) - (0.5 - \Phi(1.56)) = 0.3686 + 0.4406 \approx 0.81$$

байна.

20.15. Тасралтгүйн засвар оруулбал

$$P(649.5 < x < 750.5) = P\left(\frac{649.5 - 500}{100} < z < \frac{750.5 - 500}{100}\right) = P(1.495 < z < 2.505)$$

байна. z нь $N(0, 1)$ хэвийн тархалттай санамсаргүй хувьсагч тул

$$P(1.495 < z < 2.505) = \Phi(2.505) - \Phi(1.495) \approx 0.49 - 0.43 = 0.06$$

буюу 650-750 оноо авах магадлал нь 6% байна.

20.16.

$$\begin{aligned} \text{Var}(P_1 - P_2) &= \text{Var}(P_1) + \text{Var}(-P_2) = \text{Var}(P_1) + \text{Var}(P_2) \\ &= 100 \cdot 0.52 \cdot (1 - 0.52) + 100 \cdot 0.47 \cdot (1 - 0.47) \\ &= 24.96 + 24.91 = 49.87 \end{aligned}$$

тул $\sigma(P_1 - P_2) = \sqrt{49.87} \approx 7.06$ байна. $N(5, 7.06^2)$ хэвийн тархалт ашиглан $P = P_1 - P_2 < 0$ байх магадлалыг олж.

$$Z = \frac{p - 5}{7.06}$$

стандарт хэвийн тархалттай тул

$$P(p < 0) = P\left(z < \frac{-5}{7.06}\right) = P(z < -0.7082) = P(z > 0.7082) = 0.5 - \Phi(0.7082)$$

байна. Лапласын функцийг хүснэгт ашиглаж бодвол $\Phi(0.7082) \approx \Phi(0.71) = 0.2611$ тул $P(p < 0) = 0.5 - 0.2611 \approx 0.24$ байна.

20.17. Тоонуудыг багаас нь эхэлж жагсааж бичвэл 22, 23, 23, 24, 26, 28, 28, 28, 29, 32 болно. Нийт 10 ширхэг тоо байгаа тул голын 2 элементийн арифметик дундаж нь медиан болно. Иймд медиан нь $\frac{26 + 28}{2} = 27$ байна.

28 хамгийн олон буюу 3 удаа давтагдаж буй тул моод болно.

Дундаж нь

$$\frac{23 + 24 + 22 + 26 + 28 + 23 + 28 + 32 + 29 + 28}{10} = 26.3$$

байна.

20.18. Яг гурван гоол алдсан тоглолтын тоо 3 дугаартай мөрийн тоонуудын нийлбэр буюу

$$0 + 1 + 1 + 4 + 2 + 2 = 10$$

байна. Ядаж 4 гоол оруулсан тоглолтын тоо нь 4, ≥ 5 дугаартай багануудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр буюу

$$3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

байна. 5 буюу түүнээс дээш гоол алдаагүй тул алдсан гоолын давтамжийн хүснэгт нь

Алдсан гоолын тоо	Давтамж
0	0
1	3
2	4
3	10
4	3

тул нэг тоглолтод дундажаар

$$\frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 3}{0 + 3 + 4 + 10 + 3} = \frac{53}{20} = 26.5$$

гоол алджээ.

20.19. Санамсаргүй сонгосон өмсгөл богино ханцуйтай байх магадлал $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$, цагаан эсвэл цэнхэр өнцгийн байх магадлал $\frac{10+9}{25} = 0.76$, хөх өнгийн богино ханцуйтай байх магадлал $\frac{2}{25} = 0.08$, цагаан эсвэл богино ханцуйтай байх магадлал $\frac{10+15-7}{25} = 0.72$ байна.

20.20. 1.342, 1.347, 1.353 утгууд хамгийн олон буюу тус бүр 3 удаа орж байгаа тул 3 ширхэг моодтой. 15 ба 16 дахь тоонууд адилхан 1.347 тул медиан нь 1.347, 8 дахь тоо нь 1.341 нь доод квартил, 23 дахь тоо нь 1.353 нь дээд квартил болно. Иймд квартил хоорондын далайц нь $1.353 - 1.341 = 0.012$ гр байна.

20.21. 30-40 баганы талбай $0.2 \cdot 10 = 2$, 40-50 баганы талбай $0.6 \cdot 10 = 6$ тул 30-50 минутын завсарт 8 сурагч байна. 60-70 завсарт $3.4 \cdot 10 = 34$, 70-80 завсарт $2.7 \cdot 10 = 27$ сурагч байх тул нийт $8 + 22 + 34 + 27 + 12 = 103$ сурагч байжээ.

20.22. $X = 8$ байвал сонгосон картуудын дунд 9 байхгүй, хамгийн их тоо нь 8 ба бусад 6 карт нь 1-7 дугаартай байна. Иймд $P(X = 8) = \frac{C_7^6}{C_9^7} = \frac{7}{36}$.

$X = 7, 8, 9$ байх боломжтой. $P(X = 7) = \frac{C_7^7}{C_9^7}$, $P(X = 9) = \frac{C_8^6}{C_9^7}$ тул

$$E(X) = 7 \cdot \frac{C_7^7}{C_9^7} + 8 \cdot \frac{C_7^6}{C_9^7} + 9 \cdot \frac{C_8^6}{C_9^7} = \frac{35}{4}.$$

20.23.

$$1. P(\xi = 2) = C_4^2 \cdot 0.2^2 \cdot (1 - 0.2)^2 = 6 \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{96}{625} \text{ байна.}$$

2. ξ_i нь i -р шагай морь буух тоо гэвэл

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

ба математик дундаж нь

$$E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 + E\xi_4 = 4 \cdot 0.2 = 0.8 = \frac{4}{5}$$

байна.

20.24. Нийт 20 картнаас 3-ийг авах боломжийн тоо $C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = 1140$ байна.

1. бүгд ижил дугаартай байх боломжийн тоо нь $5 \cdot C_4^3 = 20$ (1-5 тоо тус бүрд 4 боломж)
тул магадлал нь $\frac{20}{1140} = \frac{1}{57}$,

2. Эхний картыг сонгох боломжийн тоо 20. Хоёр дахь карт эхнийхээсээ өнгө ба тоогоороо ялгаатай тул $20 - 8 = 12$ боломжтой, гурав дахь картыг үлдэх 6 картнаас сонгоно. Бид эрэмбэ тооцохгүй тул ингэж тоолоход бүх боломж яг $3! = 6$ удаа давтагдах тул өнгө ба тоо давтагдахгүй 3 тоог $\frac{20 \cdot 12 \cdot 6}{6} = 240$ янзаар сонгож болно.
Иймд магадлал нь $\frac{240}{1140} = \frac{4}{19}$ байна.

3. Улаан картыг $C_5^1 = 5$ янзаар үлдэх хоёр картыг $C_{15}^2 = 105$ янзаар сонгох тул яг нэг ширхэг улаан карт гарч ирэх боломжийн тоо $5 \cdot 105 = 525$ ба магадлал нь $\frac{525}{1140} = \frac{35}{76}$ байна.

4. Өмнөхтэй адилаар яг 0, 2, 3 ширхэг улаан карт гарч ирэх магадлалуудыг олбол харгалзан $\frac{C_{15}^3}{1140}$, $\frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{1140}$, $\frac{C_5^3}{1140}$ тул математик дундаж нь

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot \frac{C_{15}^3}{1140} + 1 \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{1140} + 2 \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{1140} + 3 \cdot \frac{C_5^3}{1140} = \\ &= \frac{0 + 525 + 300 + 30}{1140} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

байна.

20.25. 40 картнаас 2-ийг авах боломжийн тоо $C_{40}^2 = 780$ байна.

1. Ижил тоотой 2 карт гарч ирэх боломжийн тоо $10 \cdot C_4^2 = 60$ тул магадлал нь $\frac{60}{780} = \frac{1}{13}$.

2. Карт бүрийн хувьд түүнээс өнгө болон тоогоороо ялгаатай $40 - (10 + 4 - 1) = 27$ карт байна. Иймд өнгө ба тоогоороо ялгаатай 2 карт сонгох боломжийн тоо $\frac{40 \cdot 27}{2} = 540$, магадлал нь $\frac{540}{780} = \frac{9}{13}$.

3. Яг нэг нь улаан байх боломжийн тоо $10 \cdot 30 = 300$, магадлал нь $\frac{300}{780} = \frac{5}{13}$

4. Гарч ирсэн 2 карт хоёулаа улаан биш байх боломжийн тоо $C_{30}^2 = 435$. Гарч ирсэн 2 картны нэг нь улаан өнгийн $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$, нөгөө нь өөр байх боломжийн тоо 30, гарч ирсэн 2 карт улаан өнгийн $i < j$ тоонууд байх боломжийн тоо 1 байна. Иймд гарч ирсэн улаан картанд бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийн математик дундаж нь

$$\begin{aligned} E &= 0 \cdot \frac{435}{780} + \sum_{i=1}^{10} i \cdot \frac{30}{780} + \sum_{1 \leq i < j \leq 10} (i + j) \cdot \frac{1}{780} = \\ &= 55 \cdot \frac{30}{780} + 9 \cdot 55 \cdot \frac{1}{780} = \frac{55 \cdot 39}{780} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Интеграл-Онлайн сургалтын төв

Үйл ажиллагааны үндсэн чиглэл

Онлайн болон танхимын сургалт. Бид 2013 оноос хойш төрөл бүрийн онлайн сургалт, онлайн сорилго зохион байгуулж нийт 10 мянга гаруй бодолт, заавартай бодлогын санг бүрдүүлээд байна. Мөн 2018 оны 2-р сараас эхлэн математикийн хичээлээр ЭЕШ, олимпиад, гадаадын их дээд сургуулийн элсэлтийн шалгалтад бэлдэх танхимын сургалт явуулж байна.

Багшийн товч танилцуулга

Овог нэр: Балхүүгийн Батбаясгалан
Төрсөн он: 1977
Мэргэжил: Математикч, Математикийн багш
Төгссөн сургууль: Эрдэнэт хотын 4-р 10 жил 1993 он, дунд боловсрол, МУИС-ийн дэргэдэх ТТСС, 1995 он, бүрэн дунд боловсрол, МУИС, 1999 он, баклавар; 2003 он, магистр.

Ажлын туршлага:

2003–2011: МУИС-МКС, алгебрийн тэнхимд багш
2017–одоо: Интеграл-Онлайн сургалтын төвд багш, бодлогын сан хөгжүүлэгч
2019–одоо: МУИС-ийн ХШУИС-ийн хэрэглээний математикийн тэнхимд багш
2019–одоо: ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал
Бусад ажлын туршлага: Монголын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах хороонд 1995 оноос тасралтгүй ажиллаж байна. Энэ хугацаанд хот болон улсын олимпиадын ахлах ангийн төрөлд олон арван бодлого дэвшүүлж бодуулж байв. Мөн 2004-2010 хооронд олон улсын математикийн олимпиадад оролцох баг сурагчдад бэлтгэл хичээл орж байв. Улмаар 2010 онд Казакстан улсад болсон ОУМО-52-д багийн дэд ахлагчаар томилогдон оролцсон. 2017 онд ЭЕШ-ийн сэдэвт шинжээчээр, 2018 онд STEM боловсролын хөтөлбөрийн сургагч багшаар тус, тус ажилласан. Японы засгийн газрын монбушо шалгалт болон дээд математикийн чиглэлээр хэд хэдэн номд зохиогч, хамтарсан зохиогчоор оролцож байв.

Амжилт:

1994,1995: ММО-30-ийн 9-р ангийн ангилалд мөнгөн медаль; ММО-31-ийн 10-р ангийн улсын аварга болж улмаар олон улсын математикийн 35, 36-р олимпиадуудад шалгарч оролцож байв.

Бусад:

1999-2003, 2011-2015 Унгар улсын ELTE, Япон улсын KEIO их сургуулиудад докторантурт суралцаж дискрет математик, комбинаторикийн чиглэлээр судалгаа хийж байв.

Манай сургалтын дэлгэрэнгүй танилцуулыг www.integral.mn/about хуудаснаас үзнэ үү.

Хаяг: Түшээ дээд сургуулийн байр 306 тоот
(Хүүхдийн урлан бүтээх төвийн замын эсрэг талд)
Холбогдох утас: 95320036, 96660036.