

ЭЕШ-Д БЭЛДЭХ 1000 БОДЛОГО

Шинэчилсэн хөтөлбөрийн дагуу бэлтгэсэн
БОДОЛТТОЙ БОДЛОГУУД

Бодолт

Балхүүгийн Батбаясгалан



2019 он

ДАА 373
ННА 74.2
Б-332

ЭЕШ-д бэлдэх 1000 бодлого
Шинэчилсэн хөтөлбөрийн дагуу бэлтгэсэн
БОДОЛТТОЙ БОДЛОГУУД
Бодолт

Энэхүү ном нь “Монгол Улсын Зохиогчийн эрх болон түүнд хамаарах эрхийн тухай” хуулиар хамгаалагдсан бөгөөд Интеграл-Онлайн ХХК-наас бичгээр авсан зөвшөөрөлгүйгээр цахим болон хэвлэмэл хэлбэрээр бүтнээр эсвэл хэсэгчилэн хувилах, хэвлэх, аливаа хэлбэрээр мэдээллийн санд байршуулахыг хориглоно.

Тус номын талаарх аливаа санал хүсэлтээ *baysa.edu@gmail.com* хаягаар ирүүлнэ үү.

© “Интеграл-Онлайн” ХХК, “Монгол Бодлогын Сан” (www.integral.mn)

Хэвлэх үйлдвэр: Мөнхийн үсэг
Хэвлэсэн тоо: 400 ширхэг
Зохиогч: Б. Батбаясгалан
Цаасны хэмжээ: В5
Хэвлэлийн хуудас: 9.2

ISBN: 978-99978-69-17-3

Гарчиг

Гарчиг	3
§ 3. Бодолт	5
1. Тоон илэрхийлэл 2	5
2. Илтгэгч ба логарифм илэрхийлэл 2	8
3. Тригонометр илэрхийлэл 2	12
4. Тоо тоолол сэдвийн давтлага 2	16
5. Алгебрийн илэрхийлэл 2	19
6. Алгебрийн тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 2	23
7. Илтгэгч, логарифм ба тригонометр тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 2	29
8. Дараалал, Нийлбэр, Функци, Өгүүлбэртэй бодлого 2	34
9. Функци, Уламжлал, Интеграл 2	38
10. Алгебр сэдвийн давтлага 2	43
11. Хавтгайн геометр 2	49
12. Огторгуйн геометр 2	58
13. Геометр сэдвийн давтлага 2	64
14. Комбинаторик 2	71
15. Магадлал, Статистик 2	75
16. Магадлал, статистик давтлага 2	80
17. Комплекс тоо 2	84
18. Огторгуй дахь вектор нэмэлт	89
19. Алгебр, анализийн нэмэлт 2	93
20. Магадлал, статистикийн нэмэлт 2	101

Бодолт

1. Тоон илэрхийлэл 2

1.1. I. $5\frac{13}{42} - 4\frac{5}{24} = (5-4) + \frac{13}{2 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{5}{2^3 \cdot 3} = 1 + \frac{17}{168} = \frac{185}{168}$

II. $\frac{185}{168} : 11\frac{1}{84} = \frac{185}{168} : \frac{925}{84} = \frac{185}{168} \cdot \frac{84}{925} = 0.1$

1.2.

$$\frac{19^8 - 19^7}{18} = \frac{19^7(19-1)}{18} = 19^7$$

1.3.

1. $1.2 : 36 = \frac{12}{10} : 36 = \frac{12}{10} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{30};$

2. $(0.25)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{1} = 4;$

3. $1\frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5};$

4. $1.8(3) = 1.8 + 0.1 \cdot 0.(3) = \frac{9}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{55}{30} = \frac{11}{6};$

5. $\frac{1}{30} + \frac{24}{5} - \frac{11}{6} = \frac{1+24 \cdot 6-55}{30} = 3.$

1.4. $\text{ХИЕХ}(a, b, c) = \text{ХИЕХ}(\text{ХИЕХ}(a, b), c)$ байдаг.

$$\begin{aligned} 18 &= 2^1 \cdot 3^2 \\ 45 &= 3^2 \cdot 5^1 \\ 63 &= 3^2 \cdot 7^1 \end{aligned}$$

тул $\text{ХИЕХ}(18, 45, 63) = 3^2 = 9$ байна. Зөв хариу С.

1.5. $\text{ХБЕХ}(14, 24) = 168$ тул 1000-аас бага 168-д хуваагддаг хамгийн их тоо нь

$$168 \cdot \left\lfloor \frac{1000}{168} \right\rfloor = 168 \cdot 5 = 840 \text{ тул бидний олох тоо } 840 \text{ байна.}$$

1.6.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \sqrt{\frac{629^2 - 581^2}{480}} + \sqrt{20^2 + 15^2} \\
 &= \sqrt{\frac{(629 - 581)(629 + 581)}{480}} + \sqrt{(5 \cdot 4)^2 + (5 \cdot 3)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{48 \cdot 1210}{480}} + \sqrt{5^2 \cdot (4^2 + 3^2)} \\
 &= \sqrt{121} + 5\sqrt{25} \\
 &= 11 + 25 = 36
 \end{aligned}$$

1.7.

$$\frac{1}{9 - 4\sqrt{5}} + \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{(9 + 4\sqrt{5}) + (9 - 4\sqrt{5})}{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})} = \frac{18}{9^2 - 4^2 \cdot 5} = 18.$$

1.8.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2} \\
 &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{9 - 8}} \cdot \sqrt{2} \\
 &= (3 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \\
 &= 3\sqrt{2} + 4
 \end{aligned}$$

1.9.

$$\begin{aligned}
 |x - |x - 1|| &= |0.7 - |0.7 - 1|| \\
 &= |0.7 - |-0.3|| \quad \leftarrow -0.3 < 0 \Rightarrow |-0.3| = -(-0.3) = 0.3 \\
 &= |0.7 - 0.3| \\
 &= |0.4| = 0.4
 \end{aligned}$$

$$1.10. \frac{3\sqrt{5}}{30} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 10\sqrt{5} \text{ байна.}$$

$$1.11. 2 \leq \sqrt{5} < 3 \text{ тул } 2 - 3 \leq \sqrt{5} - 3 < 3 - 3 \text{ буюу } -1 \leq \sqrt{5} - 3 < 0. \text{ Иймд } [\sqrt{5} - 3] = -1.$$

$$1.12. -2 \leq -\frac{7}{5} < -1 \text{ тул } \left[-\frac{7}{5}\right] = -2 \Rightarrow \left\{-\frac{7}{5}\right\} = -\frac{7}{5} - (-2) = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ байна.}$$

1.13.

$$\begin{aligned}
 x + y &= [x] + \{x\} + [y] + \{y\} \\
 &= ([x] + \{y\}) + (\{x\} + [y]) \\
 &= 1.5 + (-2.5) = -1
 \end{aligned}$$

1.14.

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{aa} + \overline{bb} = 10a + b + 10b + a + 10a + a + 10b + b = 22(a + b) = 22 \cdot 11 = 242$$

1.15. $\frac{5}{8} = 0.625$ тул зууны орон нь 2 байна.

1.16.

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1101_2$$

1.17. $x^6 = (\sqrt[3]{5})^6 = 5^2$, $y^6 = (\sqrt{3})^6 = 3^3$, $z^6 = (2^{\frac{5}{6}})^6 = 2^5$ болох ба $5^2 < 3^3 < 2^5$ тул $z > y > x$ байна.

1.18. $a^2 \geq 0$ тул $a^2 b > 0 \Rightarrow b > 0$ байна. $bc < 0$ ба $b > 0$ тул $c < 0$ байна. Нөгөө талаас $b - a < 0$ тул $b < a$ байна. Иймд $c < 0 < b < a$ тул $c < b < a$ болно.

1.19. $2015 = 4 \cdot 503 + 3$ тул 8^{2015} нь 8^3 -тай адил 2 цифрээр төгсөнө.

1.20.

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 17 \end{cases} \Rightarrow (a - b) + (a + b) = 1 + 17$$

болох тул $a = 9$ ба $b = a - 1 = 9 - 1 = 8$ байна. Иймд $a \cdot b = 9 \cdot 8 = 72$ байна.

1.21. $5^{30} \cdot 2^{24} - 5^{24} \cdot 2^{30} = (5^6 - 2^6) \cdot 2^{24} \cdot 5^{24} = 15561 \cdot 10^{24}$ тул цифрүүдийн нийлбэр нь $1 + 5 + 5 + 6 + 1 = 18$ байна.

1.22.

$$\begin{aligned} \left(\frac{81a^{4n-1}}{25b^5} \right)^3 \cdot \left(-\frac{5^2 \cdot b^3}{27a^{3n-1}} \right)^4 &= \frac{(81a^{4n-1})^3}{(25b^5)^3} \cdot (-1)^4 \cdot \frac{(5^2 b^3)^4}{(27a^{3n-1})^4} \\ &= \frac{(3^4 a^{4n-1})^3}{(5^2 b^5)^3} \cdot (-1)^4 \cdot \frac{(5^2 b^3)^4}{(3^3 a^{3n-1})^4} \\ &= \frac{3^{12} a^{12n-3}}{5^6 b^{15}} \cdot \frac{5^8 b^{12}}{3^{12} a^{12n-4}} \\ &= 3^{12-12} 5^{8-6} a^{(12n-3)-(12n-4)} b^{12-15} \\ &= 25ab^{-3} \end{aligned}$$

1.23. 1-р бодолт.

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= \sqrt[3]{x^2 \sqrt[5]{x^{-4}} \sqrt{x^3}} = \left(x^2 \cdot \left(x^{-4} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(x^2 \cdot \left(x^{-4+\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^2 \cdot \left(x^{-\frac{5}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(x^2 \cdot x^{-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{2-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2-р бодолт. Өгсөн илэрхийллийн коэффициент нь 1 байна. Зөвхөн D хариулт буюу $x^{\frac{1}{2}}$ л 1 гэсэн коэффициенттэй тул зөв хариулт болно.

1.24.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7})} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7}^2)} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{2 + 2\sqrt{10} + 5 - 7} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{2\sqrt{10}} \quad \leftarrow \frac{\times \sqrt{10}}{\times \sqrt{10}} \\
 &= \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{70}}{20}
 \end{aligned}$$

1.25. $0.35(32) + 0.64(67) = 0.99(99) = 0.(9) = 1$ ба $0.(126) = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$ тул

$$\frac{0.35(32) + 0.64(67)}{0.(126)} = \frac{1}{\frac{14}{111}} = \frac{111}{14}$$

байна.

2. Илтгэгч ба логарифм илэрхийлэл 2

2.1.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \leftarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \\
 &= \frac{5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^2} \\
 &= 5^{2-3} \cdot 3^{3-2} \cdot 2^{2-2} \\
 &= 5^{-1} \cdot 3^1 \cdot 2^0 = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

2.2.

$$16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8$$

2.3.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= 6a^4b^3 \cdot (2a^3b^4)^3 \\
 &= 6a^4b^3 \cdot 2^3(a^3)^3(b^4)^3 \quad \leftarrow (abc)^n = a^n b^n c^n \\
 &= 6a^4b^3 \cdot 8a^9b^{12} \quad \leftarrow (a^m)^n = a^{mn} \\
 &= 48a^{4+9}b^{3+12} \quad \leftarrow a^m a^n = a^{m+n} \\
 &= 48a^{13}b^{15}
 \end{aligned}$$

2.4. $(7^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3})} = 7^{-\frac{1}{6}}$, $49^{\frac{1}{4}} = (7^2)^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{2}}$ байна. Иймд

$$\frac{(7^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}}{7^{-\frac{1}{2}}} = \frac{7^{-\frac{1}{6}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}}{7^{-\frac{1}{2}}} = 7^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = 7^{\frac{5}{6}}$$

байна.

2.5.

$$\log_5 8 = a \Leftrightarrow 5^a = 8$$

2.6. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ тул $3 \cdot 2 = 6$ байна.

2.7. $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$ байна.

2.8.

$$\lg \frac{3}{5} \cdot \lg 15 = (\lg 3 - \lg 5)(\lg 3 + \lg 5) = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

2.9. $\log_9 36 = \log_{3^2} 6^2 = \log_3 6$ тул $3^{\log_9 36} = 3^{\log_3 6} = 6$ байна.

2.10.

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= 5^{2+\log_{25} 4} - \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27 \\ &= 5^{2+\log_{5^2} 2^2} - \log_{3^{-\frac{1}{2}}} 3^3 \\ &= 5^{2+\log_5 2} - \frac{3}{-\frac{1}{2}} \log_3 3 \\ &= 5^2 \cdot 5^{\log_5 2} + 6 \cdot 1 \\ &= 25 \cdot 2 + 6 = 56 \end{aligned}$$

2.11.

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= \frac{\log_5 375}{\log_{15} 5} - \frac{\log_5 3}{\log_{1875} 5} \\ &= \log_5 375 \cdot \log_5 15 - \log_5 3 \cdot \log_5 1875 \\ &= \log_5 (3 \cdot 5^3) \cdot \log_5 (3 \cdot 5) - \log_5 3 \cdot \log_5 (3 \cdot 5^4) \\ &= (\log_5 3 + 3)(\log_5 3 + 1) - \log_5 3 (\log_5 3 + 4) \\ &= 3 \end{aligned}$$

2.12.

$$n \leq \lg a < n+1 \Leftrightarrow 10^n \leq 10^{\lg a} = a < 10^{n+1}$$

буюу хамгийн бага $n+1$ оронтой тооноос багагүй хамгийн бага $n+2$ оронтой тооноос бага тул a тоо $n+1$ оронтой байна.

2.13.

$$\begin{aligned} \log_6 48 &= \frac{\ln 48}{\ln 6} = \frac{\ln(2^4 \cdot 3)}{\ln(2 \cdot 3)} \\ &= \frac{\ln 2^4 + \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} = \frac{4 \ln 2 + \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} \\ &= \frac{4a + b}{a + b} = \frac{b + 4a}{b + a} \end{aligned}$$

2.14.

$$9^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{16} = (3^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{2^4} = 3^{2 \cdot \frac{3}{2}} + 2^{\frac{4}{4}} = 3^3 + 2 = 29$$

2.15.

$$\begin{aligned} -12 \cdot 256^{0.25} - 21 &= -12 \cdot (4^4)^{0.25} - 21 \\ &= -12 \cdot 4^{4 \cdot 0.25} = -12 \cdot 4^1 - 21 \\ &= -48 - 21 = -69 \end{aligned}$$

2.16.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt{x^{-4} \sqrt[3]{x^2}}} &= (x^3 \cdot (x^{-4} \cdot x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (x^3 \cdot (x^{-4 + \frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (x^3 \cdot (x^{-\frac{10}{3}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (x^3 \cdot x^{-\frac{5}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (x^{3 - \frac{5}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ &= x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

2.17. $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ ба

$$7^{2 \log_{49} 2} = (7^2)^{\log_{49} 2} = 49 \cdot \log_{49} 2 = 2$$

тул

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2 \log_{49} 2} = (-2) \cdot (-3) : 2 = 3$$

байна.

2.18.

$$\begin{aligned} \sqrt{\lg^2 5 + 4 \lg 50} &= \sqrt{\lg^2 5 + 4(\lg 5 + 1)} \\ &= \sqrt{\lg^2 5 + 4 \lg 5 + 4} \\ &= \sqrt{(\lg 5 + 2)^2} = \lg 5 + 2 \\ &= \lg 5 + \lg 100 = \lg 500 \end{aligned}$$

2.19.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\log_3 \sqrt[3]{16}}{\log_3 2} - \log_{\frac{1}{27}} (\log_6 7 \log_7 216) \\
 &= \log_2 \sqrt[3]{16} - \log_{\frac{1}{27}} (\log_6 216) \\
 &= \log_2 2^{\frac{4}{3}} - \log_{3^{-3}} (\log_6 6^3) \\
 &= \frac{4}{3} - \log_{3^{-3}} 3 \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{-3} \cdot \log_3 3 \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

2.20.

$$\begin{aligned}
 4^{2x+1} - 8^x &= 4 \cdot 4^{2x} - 8^x = 4 \cdot 2^{4x} - 2^{3x} = 4 \cdot (2^x)^4 - (2^x)^3 \\
 &= 4 \cdot 3^4 - 3^3 = 324 - 27 = 297
 \end{aligned}$$

2.21.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= 100^{1-\lg \frac{5}{2}} + \log_3 81 \\
 &= \frac{100}{(10^{\lg \frac{5}{2}})^2} + \log_3 3^4 \\
 &= \frac{100}{(\frac{5}{2})^2} + 4 = \frac{100 \cdot 4}{25} + 4 \\
 &= 16 + 4 = 20
 \end{aligned}$$

2.22. $A^{12} = (\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64$, $B^{12} = (\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$, $C^{12} = (\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81$ тул

$$A^{12} < C^{12} < B^{12} \Leftrightarrow A < C < B$$

байна.

2.23.

$$\begin{aligned}
 2^{\log_4 8} + 8^{\log_4 2} &= 2^{\log_{2^2} 2^3} + (2^3)^{\log_{2^2} 2} = 2^{\frac{3}{2}} + 2^{3 \cdot \frac{1}{2}} \\
 &= 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

2.24.

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{\sqrt{q}}{p}} \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt{p}} &= \frac{\log_p \frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt{p}}}{\log_p \frac{\sqrt{q}}{p}} = \frac{\log_p \sqrt[3]{q} - \log_p \sqrt{p}}{\log_p \sqrt{q} - \log_p p} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \log_p q - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \log_p q - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{3(\sqrt{3} - 2)} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{3(\sqrt{3} - 2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

2.25.

$$3^x = 7^y = 21^z \Leftrightarrow \log 3^x = \log 7^y = \log 21^z \Leftrightarrow$$

$$x \log 3 = y \log 7 = z \log 21 = z(\log 3 + \log 7) = t$$

болно. Эндээс $\log 3 = \frac{t}{x}$, $\log 7 = \frac{t}{y}$ ба $xyz \neq 0$ тул

$$z \left(\frac{t}{x} + \frac{t}{y} \right) = t \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

байна.

Жич: Энд $\log$ нь дурын суурьтай логарифм байж болно.

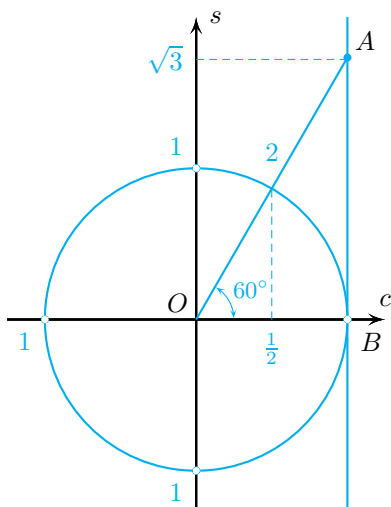
3. Тригонометр илэрхийлэл 2

3.1.

$$\left. \begin{array}{l} 180^\circ \\ 27^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \pi \\ - x \end{array} \Rightarrow \frac{180^\circ}{27^\circ} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{20}$$

3.2. $A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ тул $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ байна.

3.3.



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{1} = \sqrt{3}$$

3.4. 1-р бодолт. $\sin x = \cos x = 1$ байх боломжгүй тул 2 шийд болохгүй. Мэдээж $\sin x + \cos x$ нь эерэг утга авах боломжтой тул үлдэх хариултуудаас зөвхөн $\sqrt{2}$ л зөв байх боломжтой. Үнэндээ $x = 45^\circ$ үед $y = \sin x + \cos x$ функц хамгийн их $\sqrt{2}$ утгаа авдаг. 2-р бодолт. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$ ба $x = \frac{\pi}{4}$ үед тэнцэлдээ хүрнэ. Иймд $\sin x + \cos x$ -ийн хамгийн их утга нь $\sqrt{2}$ байна.

3.5.

$$\begin{aligned}\sin 690^\circ &= \sin(690^\circ - 360^\circ) = \sin 330^\circ = \sin(330^\circ - 360^\circ) \\ &= \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3.6.

$$\cos^2 39^\circ + \cos^2 51^\circ = \cos^2(90^\circ - 51^\circ) + \cos^2 51^\circ = \sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ = 1$$

3.7.

$$\begin{aligned}(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \\ 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{1}{9} - 1}{2} = -\frac{4}{9}\end{aligned}$$

байна.

3.8.

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} && \leftarrow \begin{array}{l} : \cos^2 \alpha \\ : \cos^2 \alpha \end{array} \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\left(-\frac{15}{8}\right)^2}{\left(-\frac{15}{8}\right)^2 + 1} && \leftarrow \begin{array}{l} \times 8^2 \\ \times 8^2 \end{array} \\ &= \frac{225}{225 + 64} = \frac{225}{289}\end{aligned}$$

$$\sin \alpha > 0 \text{ тул } \sin \alpha = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17} \text{ байна.}$$

3.9. Косинус нь тэгш функц тул $a = \cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ = c$ байна. Косинус нь $[0^\circ, 180^\circ]$ завсарт буурдаг функц тул $\cos 20^\circ > \cos 60^\circ$ байна. Иймд $b < a = c$ байна

3.10. $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$ тул $b < a < c$ байна.

3.11. $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$ болно. Эндээс

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

3.12.

$$\begin{aligned}\text{Илэрх.} &= \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

3.13. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ байна.

3.14.

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

3.15. $t = \cos \theta - \sin \theta$ гэе. $45^\circ < \theta < 135^\circ$ үед $\sin \theta > \cos \theta$ тул $t < 0$ байна. Түүнчлэн

$$t^2 = (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 1 - 2 \cos \theta \sin \theta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

тул $t = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ байна.

3.16.

$$\begin{aligned} \sin 61^\circ - \sin 59^\circ &= 2 \cdot \cos \frac{61^\circ + 59^\circ}{2} \cdot \sin \frac{61^\circ - 59^\circ}{2} = \\ &= 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 1^\circ = \sin 1^\circ \end{aligned}$$

ба $\sin 87^\circ = \sin(180^\circ - 93^\circ) = \sin 93^\circ$ тул

$$\begin{aligned} \sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ &= \\ &= (\sin 87^\circ - \sin 93^\circ) + (\sin 61^\circ - \sin 59^\circ) = \\ &= 0 + \sin 1^\circ = \sin 1^\circ \end{aligned}$$

3.17.

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= 2 \cos 140^\circ \cdot \sin(-40^\circ) \\ &= 2(-\cos 40^\circ) \cdot (-\sin 40^\circ) \\ &= 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= \sin(2 \cdot 40^\circ) = \sin 80^\circ \\ &= \cos(90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ \end{aligned}$$

3.18.

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ + \cos 75^\circ &= 2 \cos \frac{15^\circ + 75^\circ}{2} \cdot \cos \frac{15^\circ - 75^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 45^\circ \cdot \cos(-30^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

3.19. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ба $-\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ тул $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ байна. Иймд

$$\cos(\arctg(-\sqrt{3})) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

3.20.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4}$ нь 45° , $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ тул $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ байна.

Санамж: Үүнтэй адилаар нийлбэр, ялгавар өнцгийн томьёо ашиглан $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ өнцгүүдийн тригонометрийн функцүүдийн утгыг бодох боломжтой.

3.21.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \sin^2 10^\circ + \sin^2 130^\circ + \sin^2 110^\circ \\
 &= \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 260^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 220^\circ}{2} \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 260^\circ) - \frac{1}{2} \cos 220^\circ \\
 &= \frac{3}{2} - \cos 140^\circ \cos(-120^\circ) - \frac{1}{2} \cos 220^\circ &< \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 140^\circ - \frac{1}{2} \cos 220^\circ = \frac{3}{2} = 1.5 &< \cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)
 \end{aligned}$$

3.22.

$$\begin{aligned}
 \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = \\
 &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{13}{25}
 \end{aligned}$$

3.23.

$$4 \cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ = \sin 72^\circ = \cos 18^\circ$$

Эндээс $4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1$ болох нь харагдаж байна.

3.24. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ тул $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. $\cos \alpha > 0$ тул

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ ба $\sin \beta < 0$ тул

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{33}{65}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{63}{65}$$

3.25.

$$\begin{aligned}
 \sin 40^\circ \cdot \cos 70^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin 110^\circ + \sin(-30^\circ)) \cdot \sin 80^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sin 110^\circ \cdot \sin 80^\circ - \frac{1}{4} \cdot \sin 80^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{1}{2}(\cos 190^\circ - \cos 30^\circ) \right\} - \frac{1}{4} \cdot \sin 80^\circ \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot \cos 190^\circ + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

Энд $\cos 190^\circ = \cos(180^\circ + \cos 10^\circ) = -\cos 10^\circ$, $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ болон $\ast \rightarrow +$ хувиргалтын томьёонуудыг ашиглав.

4. Тоо тоолол сэдвийн давтлага 2

4.1.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2} \\
 &= \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{9-8}} \cdot \sqrt{2} \\
 &= (3-2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \\
 &= 3\sqrt{2}-4
 \end{aligned}$$

4.2. $-3 \leq -2.37 < -2$ тул $[-2.37] = -3$ байна. Иймд $\{-2.37\} = -3 - (-2.37) = 0.63$ байна.

$3 \leq \sqrt{12} < 4$ тул $[\sqrt{12}] = 3$. $3 \leq \frac{7}{2} = 3.5 < 4$ тул $\left[\frac{7}{2}\right] = 3$ байна. $5 \leq 5.37 < 6$ тул $[5.37] = 5$ ба $\{5.37\} = 5.37 - 5 = 0.37$ Эдгээрийг ашиглавал

$$\{-2.37\} + [\sqrt{12}] - \left[\frac{7}{2}\right] + \{5.37\} = 0.63 + 3 - 3 + 0.37 = 1$$

байна.

4.3.

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{aa} + \overline{bb} = 10a + b + 10b + a + 10a + a + 10b + b = 22(a + b) = 22 \cdot 7 = 154$$

4.4. $55 = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 313_5$ болно.

4.5. $A^{12} = (\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64$, $B^{12} = (\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$, $C^{12} = (\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81$ тул

$$A^{12} < C^{12} < B^{12} \Leftrightarrow A < C < B$$

байна.

4.6. $\lg A, \lg B, \lg C$ тоонуудыг жишье.

$$\lg A = \lg \sqrt[7]{8} = \lg 2^{3/7} = \frac{3}{7} \cdot 0.3010 = 0.129,$$

$$\lg B = \lg \sqrt[6]{5} = \lg 5^{1/6} = \frac{1}{6} \lg 5 = \frac{1}{6} (1 - \lg 2) = \frac{1}{6} (1 - 0.3010) = 0.1165,$$

$$\lg C = \lg \sqrt[5]{6} = \lg 6^{1/5} = \frac{\lg 6}{5} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{5} = \frac{0.3010 + 0.4771}{5} = 0.15562$$

тул $\lg B < \lg A < \lg C$ байна. Иймд $B < A < C$.

4.7. $2015 = 4 \cdot 503 + 3$ тул 3^{2015} нь 3^3 -тай адил 7 цифрээр төгсөнө.

4.8. 9 ба 10-д зэрэг хуваагдах 0-ээс их хамгийн бага бүхэл тоо нь ХБЕХ(9, 10) = 90 байна. Иймд бидний олох тоо $90 + 5 = 95$ юм.

4.9.

$$\begin{aligned}
 \log_6 48 &= \frac{\ln 48}{\ln 6} = \frac{\ln(2^4 \cdot 3)}{\ln(2 \cdot 3)} \\
 &= \frac{\ln 2^4 + \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} = \frac{4 \ln 2 + \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} \\
 &= \frac{4a + b}{a + b} = \frac{b + 4a}{b + a}
 \end{aligned}$$

4.10. $f(2) = 5^{2+1} = 125$, $f(x_0) = 5^{x_0+1} = 4 \cdot 125 = 500$ тул

$$5^{x_0} = 100 \Leftrightarrow x_0 = \log_5 100 = \log_5 (5^2 \cdot 4) = 2 + \log_5 4$$

4.11. $y = \log_a x$ функц $x > 0$ мужид тодорхойлогддог. Учир нь $a > 0$, $a \neq 1$ тооны ямар ч зэрэг нь 0 буюу түүнээс бага байж болдоггүй. Иймд $\ln 0$ илэрхийлэл тодорхойлогдохгүй.

4.12.

$$\sqrt{\lg^2 2 + 2 \lg 25} = \sqrt{(1 - \lg 5)^2 + 4 \lg 5} = \sqrt{(1 + \lg 5)^2} = 1 + \lg 5$$

4.13.

$$\log_a (a\sqrt{a}) = \log_a a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

4.14.

$$\begin{aligned}
 \text{Илэрх.} &= \frac{\log_2 \sqrt[3]{5}}{\log_2 5} - \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \log_3 4) \\
 &= \frac{\log_2 5^{\frac{1}{3}}}{\log_2 5} - \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 4) \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \log_2 5}{\log_2 5} - \log_{\frac{1}{4}} 2 \\
 &= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

4.15.

$$x = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = 2 \cdot \log_{2^{-1}} 5^{-1} = 2 \cdot \frac{-1}{-1} \cdot \log_2 5 = \log_2 5^2 = \log_2 25$$

$$y = 3 \cdot \log_{2^3} 26 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 26 = \log_2 26$$

ба $y = \log_2 x$ функц нь өсөх функц тул

$$x < y < z$$

байна.

4.16.

$$\begin{aligned}
\text{Илэрх.} &= \left(3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}} + 8^{\frac{1}{3\log_9 2}} + 1 \right)^{0.5} \\
&= \left(3^{1+\frac{1}{\log_2 3}} + \left(8^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{\log_9 2}} + 1 \right)^{0.5} \\
&= \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{\log_2 3}} + 2^{\frac{1}{\log_9 2}} + 1 \right)^{0.5} & \leftarrow \frac{1}{\log_a b} = \log_b a \\
&= \left(3 \cdot 3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 9} + 1 \right)^{0.5} & \leftarrow a^{\log_a b} = b \\
&= (3 \cdot 2 + 9 + 1)^{0.5} = 16^{0.5} = 4
\end{aligned}$$

4.17.

$$\begin{aligned}
\sin \left(\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4}$ нь 45° , $\frac{\pi}{6}$ нь 30° тул $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ байна.

Санамж: Үүнтэй адилаар нийлбэр, ялгавар өнцгийн томьёо ашиглан $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ өнцгүүдийн тригонометрийн функцүүдийн утгыг бодох боломжтой.

4.18. $\frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{3} \cdot (-1) = -\frac{2}{3} > -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$ тул хамгийн бага нь $\sin \frac{3\pi}{2}$ байна.

4.19.

$$\begin{aligned}
m^2 &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\
&= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha
\end{aligned}$$

Иймд $\sin 2\alpha = m^2 - 1$ байна

4.20.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ &= \frac{1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \\
&= \frac{1 - (1 - 2 \cos 80^\circ)}{2 \sin 10^\circ} = \frac{2 \cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 80^\circ)}{\cos 10^\circ} = 1
\end{aligned}$$

4.21.

$$\begin{aligned}
\text{Илэрх.} &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\
&= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\
&= 1^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot 1 + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\
&= 1
\end{aligned}$$

4.22. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ тул

$$(7 + 3\sqrt{5}) \sin^4 18^\circ = (7 + 3\sqrt{5}) \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^4 = \frac{1}{8}$$

4.23. $\log_{y^3} 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} x^2 = 1$ тул

$$\log_{y^3} 2^3 \cdot \log_{(\sqrt{2})^2} x^{2 \cdot 2} = \log_y 2 \cdot \log_2 x^4 = \log_y x^4 = 1 \Rightarrow x^4 = y$$

болно. Иймд $x^2 = y^{\frac{1}{2}}$ байна.

4.24.

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

байна. Иймд

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{5} + 2$$

ба $2 < \sqrt{5} < 3$ тул

$$4 \leq \alpha < 5$$

байна. Иймд $a = [\alpha] = 4$ ба

$$b = \{\alpha\} = \alpha - [\alpha] = \sqrt{5} + 2 - 4 = \sqrt{5} - 2$$

болно. Эндээс

$$\begin{aligned} a + b^2 + 4b &= 4 + (\sqrt{5} - 2)^2 + 4(\sqrt{5} - 2) \\ &= (\sqrt{5} - 2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{5} - 2) + 2^2 \\ &= (\sqrt{5} - 2 + 2)^2 = 5 \end{aligned}$$

4.25.

1.

$$\begin{aligned} x - y &= \frac{1}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) = 4 \\ xy &= \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{xy} = \frac{4^2 + 2 \cdot 1}{1} = 18$$

3.

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \\ &= 4^3 + 3 \cdot 1 \cdot 4 = 64 + 12 = 76 \end{aligned}$$

5. Алгебрийн илэрхийлэл 2

5.1.

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (4y) + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

5.2.

$$(x - 1)^2 - 3^2 = (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) = (x - 4)(x + 2)$$

5.3.

$$27m^3 + n^3 = (3m)^3 + n^3 = (3m + n)((3m)^2 - 3m \cdot n + n^2) = \\ = (3m + n)(9m^2 - 3mn + n^2)$$

5.4.

$$(x - 2y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot (2y) + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = \\ = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

$$5.5. \frac{x^3 - 1}{x + 1} : \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x + 1} \ddot{\text{а}} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2 + x + 1} = (x - 1)^2.$$

5.6. $x^2 - 2x + (7 - a) = 0$ квадрат тэгшитгэл яг нэг бодит шийдтэй байхын тулд дискриминант нь

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (7 - a) = 0$$

байх ёстой. Эндээс $a = 6$.

5.7.

$$x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow (x - 1)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3$$

тул $x^2 - 2x - 2 = 0$ байна.

5.8.

$$\frac{2ab^2 + 2a^2b}{b^2 - 3ab + a^2} = \frac{2ab(b + a)}{(a + b)^2 - 5ab} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{4}{51}$$

5.9.

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{-b - \sqrt{D}}{2} - \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \right| = \sqrt{D}$$

Иймд $|x_2 - x_1| = \sqrt{4 + 4(m + 1)} = 4$. Эндээс $4m + 8 = 16 \Rightarrow m = 2$.

5.10. $a^2 - (b + 3)a - 6b^2 + 9b = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүд нь

$$a_{1,2} = \frac{b + 3 \pm \sqrt{(b + 3)^2 - 4 \cdot (-6b^2 + 9b)}}{2} = \\ = \frac{b + 3 \pm \sqrt{25b^2 - 30b + 9}}{2} = \frac{b + 3 \pm (5b - 3)}{2}$$

тул $a_1 = 3b$, $a_2 = -2b + 3$. Иймд

$$a^2 - ab - 3a - 6b^2 + 9b = (a - 3b)(a + 2b - 3)$$

байна.

5.11. $y = x^2$ параболыг $\vec{p} = (-3, 4)$ векторын дагуу параллель зөөхөд

$$y = (x - (-3))^2 + 4 = (x + 3)^2 + 4$$

парабол гарна.

5.12.

$$a = -x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (a + 12) = 0$$

тэгшитгэл шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a + 12) \geq 0 \Leftrightarrow -32 - 4a \geq 0$$

тул $a \leq -8$ байна. Иймд $y = -x^2 + 4x - 12$ функцийн дүр нь $]-\infty; -8]$ байна.

$$5.13. 25x^2 - 4y^2 = 25x^2 - 4\left(\frac{5}{2}x\right)^2 = 25x^2 - 4 \cdot \frac{25}{4}x^2 = 25x^2 - 25x^2 = 0.$$

$$5.14. a = bk \text{ гэвэл}$$

$$a^2 + 3ab + 2b^2 = b^2(k^2 + 3k + 2) = b^2(k + 1)(k + 2)$$

$$2b^2 - ab - a^2 = -b^2(k^2 + k - 2) = -b^2(k - 1)(k + 2)$$

тул $a^2 + 3ab + 2b^2 = (a + b)(a + 2b)$, $2b^2 - ab - a^2 = -(a - b)(a + 2b)$ болно. Иймд

$$\frac{a^2 + 3ab + 2b^2}{2b^2 - ab - a^2} = \frac{(a + b)(a + 2b)}{-(a - b)(a + 2b)} = \frac{b + a}{b - a}$$

$$5.15. P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \text{ ба } \alpha = 3 \text{ тул үлдэгдэл нь}$$

$$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

байна.

$$5.16. (x - 1)\text{-д хуваахад гарах үлдэгдэл нь тогтмол тоо тул}$$

$$R(x) = R(1) = P(1) = 1^{2017} - 1 + 1 = 1$$

байна.

$$5.17. P(x) = (x^2 - 1)T(x) + R(x) \text{ гэвэл}$$

$$P(-1) = ((-1)^2 - 1) \cdot T(x) + R(-1) = R(-1)$$

тул

$$R(-1) = P(-1) = 1 - 2 + 3 - 1 + 3 = 4.$$

$$5.18.$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} = 9$$

тул

$$x + \frac{1}{x} = 7$$

байна.

$$5.19.$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 45 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = \frac{45}{x - y} = \frac{45}{3} = 15$$

Нөгөө талаас $x - y = 3$ -ийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл $x^2 - 2xy + y^2 = 9$ болно. $xy = 15 - x^2 - y^2$ тул $x^2 - 2(15 - x^2 - y^2) + y^2 = 9$ болох ба эндээс

$$3x^2 + 3y^2 - 30 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 13$$

болж байна.

5.20.

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x+3)x^2 - 4(x+3) = (x+3)(x^2 - 4) = 0$$

гэж үржигдэхүүнд задалж бодвол $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ тул

$$\frac{1}{-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{-2} = -\frac{1}{3}$$

байна.

Мөн куб тэгшитгэлийн хувь дахь Виетийн теорем ашиглаад

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{-4}{-(-12)} = -\frac{1}{3}$$

гэж шууд бодож болно.

5.21.

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x(x^2 - 9x^3) + (3x+2) \cdot (x-4) + (6x^2+1)^2 \\ &= 4x^3 - 36x^4 + 3x^2 - 10x - 8 + 36x^4 + 12x^2 + 1 \\ &= 4x^3 + 51x^2 - 10x - 7 \end{aligned}$$

тул зэрэг нь 3 байна.

5.22.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a - \sqrt{2b}} + \frac{1}{a + \sqrt{2b}} \right) : \frac{a}{a^2 - 2b} = \\ &= \left(\frac{(a + \sqrt{2b})}{(a - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2b})} + \frac{(a - \sqrt{2b})}{(a - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2b})} \right) \cdot \frac{a^2 - 2b}{a} = \\ &= \frac{2a}{a^2 - 2b} \cdot \frac{a^2 - 2b}{a} = 2. \end{aligned}$$

5.23.

$$\frac{x-2y}{2x+y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 7y$$

тул

$$\frac{50xy}{x^2 + y^2} = \frac{50 \cdot 7y \cdot y}{(7y)^2 + y} = \frac{350y^2}{50y^2} = 7$$

5.24. $2a - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 5$ тул $a^2 - a - 1 = 0$ байна.

$a^2 = a + 1$ тул

$$\begin{aligned} a^3 &= a^2 \cdot a = (a+1)a = a^2 + a = 2a + 1 \\ a^4 &= a^3 \cdot a = (2a+1)a = 2a^2 + a = 2(a+1) + a = 3a + 2 \end{aligned}$$

тул

$$\begin{aligned} a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 &= (3a+2) + (2a+1) + (a+1) + a + 1 \\ &= 7a + 5 = 7 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 5 = \frac{17 + 7\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

5.25.

$$\begin{cases} x+y=5k \\ y+z=8k \\ z+x=7k \end{cases}$$

тул

$$\begin{aligned} x &= \frac{(x+y) - (y+z) + (z+x)}{2} = \frac{5k+7k-8k}{2} = 2k \\ y &= 5k - 2k = 3k \\ z &= 7k - 2k = 5k \end{aligned}$$

Иймд

$$\begin{aligned} \text{Илэрх.} &= \frac{x^3 + 2y^3 - z^3}{(x-2y)(y+z)(z-x)} \\ &= \frac{(2k)^3 + 2(3k)^3 - (5k)^3}{(2k-6k)(3k+5k)(5k-2k)} \\ &= \frac{8k^3 + 54k^3 - 125k^3}{(-4k)(8k)(3k)} \\ &= \frac{-63k^3}{-96k^3} = \frac{21}{32} \end{aligned}$$

6. Алгебрийн тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 2

6.1.

$$-2(x+1) - 3 = -2 \Leftrightarrow -2x - 5 = -2 \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{-2} = -1.5$$

6.2.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

6.3. $2x^2 + x - a - 1 = 0$ тэгшитгэлийн дискриминант нь

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-a-1) = 8a+9$$

байна. Квадрат тэгшитгэл шийдгүй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $D < 0$ тул

$$8a+9 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{9}{8} = -1.125$$

үед тэгшитгэл шийдгүй байна. Иймд $a \in]-\infty; -1.125[$ байна.

6.4. $x = -4$ нь $f(x) = x^2 + x + a = 0$ тэгшитгэлийн шийд тул $(-4)^2 + (-4) + a = 0$ байна. Иймд

$$16 - 4 + a = 0 \Rightarrow a = -12$$

6.5.

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 3x + 1 &= 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 - 3(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \\ (x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1) &= (x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2 - 4x + 1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

тул $x_1 = -1$ ба $x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ байна.

6.6. $t^2 + at + 9 = 0$ шийдтэй байхын тулд

$$D = a^2 - 4 \cdot 9 = a^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -6 \cup a \geq 6$$

байна. Виетийн теоремоор $t_1 \cdot t_2 = 9$ тул эдгээр нь ижил тэмдэгтэй байна. Бид $t \geq 0$ байх шийд хайж байгаа тулд $t_1, t_2 \geq 0$ байх шаардлагатай. Иймд

$$t_1 + t_2 = -a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$$

байх шаардлагатай тул $a \leq -6$ байна.

6.7. Тодорхойлогдох муж нь $3x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. $x \geq 4$ үед

$$\sqrt{3x - 12} < 3 \Leftrightarrow 3x - 12 < 3^2 \Leftrightarrow 3x < 21 \Leftrightarrow x < 7$$

Тодорхойлогдох мужаа тооцон шийдийг нэгтгэж бичвэл

$$4 \leq x < 7$$

6.8. $(x^2 - 1)\sqrt{2x + 1} = 0$ бол $x^2 - 1 = 0$ эсвэл $\sqrt{2x + 1} = 0$ байна. Эхний тэгшитгэлээс $x = \pm 1$, хоёр дахь тэгшитгэлээс $x = -\frac{1}{2}$ боловч $x = -1$ үед $\sqrt{2x + 1}$ тодорхойлогдохгүй тул шийд нь $1, -\frac{1}{2}$ болно.

6.9. Язгуурын доорхи илэрхийлэл эерэг байх тул $x \geq 0$. Бутархайн хуваарь тэг биш тул $\sqrt{x} - 2 \neq 0$ буюу $x \neq 4$. Иймд $D = [0; 4[\cup]4; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 3 &\leq \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 - \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2) - 2}{\sqrt{x} - 2} \leq 0. \end{aligned}$$

Сүүлийн тэнцэтгэл биш нь $\frac{x - 5\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2} \leq 0$ болох ба энэ нь тодорхойлогдох муждаа ($x \neq 4, x > 0$)

$$(\sqrt{x} - 2)(x - 5\sqrt{x} + 4) \leq 0$$

тэнцэтгэл биштэй тэнцүү чанартай. $t = \sqrt{x}$ гэвэл $t \geq 0$ ба

$$(t - 2)(t^2 - 5t + 4) = (t - 2)(t - 1)(t - 4) \leq 0$$

болно. Үүнийг интервалын аргаар бодвол $t \in]-\infty; 1] \cup [2; 4]$. Иймд $\sqrt{x} \leq 1$ эсвэл $2 \leq \sqrt{x} \leq 4$ болно. Иймд $x \leq 1$ эсвэл $4 \leq x \leq 16$ байна. Үүнийг тодорхойлогдох мужтай огтлолцуулбал $x \in [0; 1] \cup]4; 16]$ болов.

6.10. Тэгшитгэлийн 2 талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 3} &= 3 \Rightarrow \\ (\sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 3})^2 &= 3^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 - x + 2\sqrt{2-x}\sqrt{x+3} + x + 3 = 9 \Rightarrow \\ \sqrt{6-x-x^2} = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

болно. Эндээс $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ болох ба хоёулаа анхны тэгшитгэлийн шийд болно. Иймд нийлбэр нь $1 + (-2) = -1$ байна.

6.11. $t + \frac{1}{t} = 2.5 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 0.5$ байна.

Иймд

$$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} = 2 \Rightarrow \frac{16x}{x-1} = 32 \Rightarrow x = 2, \\ \sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} = 0.5 \Rightarrow \frac{16x}{x-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow x = -\frac{1}{511}$$

байна.

6.12. $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 16 \end{cases}$ систем тэгшитгэлийг бодъё.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 4(a^2 - ab + b^2) = 16$$

тул $a^2 - ab + b^2 = 4$ болно. $b = 4 - a$ -г орлуулбал

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - a(4 - a) + (4 - a)^2 = 4$$

буюу

$$3a^2 - 12a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

болно. Иймд

$$a = \sqrt[3]{9 - \sqrt{x+1}} = 2 \Rightarrow 9 - \sqrt{x+1} = 8 \Rightarrow x = 0$$

болно. $x = 0$ шийд болохыг шалгахад төвөгтэй биш.

6.13. Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох мужийг тооцвол $2x - 6 \geq 0$, $6 - 2x \geq 0$ тул

$$3 \leq x \leq 3$$

болно. $x = 3$ тэнцэтгэл бишийн шийд тул $x = 3$ шийдтэй.

6.14. $x = 2$ үед

$$\sqrt{2^3 + 8} + \sqrt[4]{2^3 + 8} = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$$

тул шийд болж байна.

6.15. $x = -2$ үед

$$|(-2)^2 - (-2) - 6| = 0 < (-2) + 3 = 1$$

тул шийд болно. $x = 2$ үед

$$|2^2 - 2 - 6| = 4 < 2 + 3 = 5$$

тул шийд болно. $x = 3$ үед

$$|3^2 - 3 - 6| = 0 < 3 + 3 = 6$$

тул шийд болно. $x = 4$ үед

$$|4^2 - 4 - 6| = 6 < 4 + 3 = 7$$

тул шийд болно. Иймд D хариулт зөв байна.

6.16. $x^2 \neq 0$ тоонд хувааж өгвөл $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$. $x + \frac{1}{x} = a \geq 0$ гэж орлуулбал

$$a^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 \text{ тул}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

болно. Эндээс a эерэг тул $a = 6$ байна.

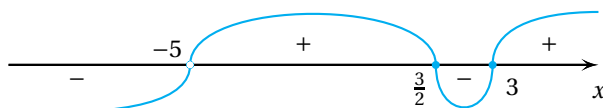
6.17.

$$\frac{(x-3)(2x-3)}{(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(2x-3)(x+5) \leq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$(x-3)(2x-3)(x+5) \leq 0 \Leftrightarrow 2(x+5)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-3) \leq 0 \text{ байна.}$$

Муж	$x < -5$	$-5 < x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 3$	$3 < x$
Тэмдэг	--- = -	+ -- = +	++ - = -	+++ = +

тодорхойлогдох мужаа тооцвол:



тул тэнцэтгэл бишийн шийд нь $]-\infty; -5[\cup [\frac{3}{2}; 3]$ байна.

6.18.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 + \frac{2x-3}{x+2}}{2 + \frac{3x-4}{2x+4}} + \frac{2 + \frac{3x+2}{2x-1}}{3 + \frac{5x+3}{2x-1}} && \frac{\times (2x+4)}{\times (2x+4)} && \frac{\times (2x-1)}{\times (2x-1)} \\ &= \frac{2x+4 + 2(2x-3)}{2(2x+4) + 3x-4} + \frac{2(2x-1) + 3x+2}{3(2x-1) + 5x+3} \\ &= \frac{6x-2}{7x+4} + \frac{7x}{11x} = \frac{6x-2}{7x+4} + \frac{7}{11} \end{aligned}$$

тул

$$\frac{6x-2}{7x+4} = \frac{4}{11} \Rightarrow 66x - 22 = 28x + 16 \Rightarrow x = 1$$

байна.

6.19.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} < 1 &\Leftrightarrow \frac{1+t+2(5-t)-(5-t)(1+t)}{(5-t)(1+t)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2-5t+6}{(5-t)(1+t)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)(t-3)}{(t-5)(t+1)} > 0 \end{aligned}$$

болно. Тэнцэтгэл бишийг интервалын аргаар бодвол

$$t \in]-\infty; -1[\cup]2; 3[\cup]5; +\infty[$$

Эндээс хамгийн бага эерэг бүхэл шийд нь 6 болох нь харагдаж байна.

6.20. $t = \sqrt[6]{2x-5}$ гэвэл

$$5t^2 + t < 6 \Leftrightarrow 5(t-1) \left(t + \frac{6}{5} \right) < 0$$

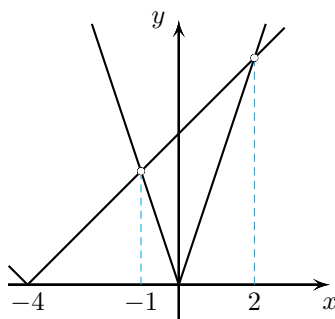
тул $-\frac{6}{5} < t < 1$. $0 \leq 2x-5$ үед $t > 0$ тул $2.5 \leq x$ ба $2x-5 < 1^6$ байна. Иймд $2.5 \leq x < 3$ байна.

6.21. $x \geq 1$ үед тэнцэтгэл биш шийдгүй тул $x < 1$ байна. Энэ үед

$$|x - |x-1|| = |x - (1-x)| = |2x-1|$$

байна. $|2x-1| = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = \pm 2$ болно. $2x-1 = 2 \Rightarrow x = 1.5$ ба $2x-1 = -2 \Rightarrow x = -0.5$ байна. $x < 1$ тул зөвхөн $x = -0.5$ шийдтэй. Иймд шийдүүдийн нийлбэр нь -0.5 байна.

6.22.



зургаас харахад $y = |x+4|$ функцийн график $y = 3|x|$ функцийн графикаас дээр орших хэсэг буюу $|x+4| \geq 3|x|$ байх хэсэг нь $[-1; 2]$ муж байна. Иймд мужийн урт нь $2 - (-1) = 3$ байна.

6.23. 1-р бодолт. Зааварт ёсоор $t = \frac{x}{y}$ нь

$$\frac{t^2 + 3t + 11}{t + 2} = 5$$

тэгшитгэлийн шийд болно. Эндээс $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 1$ буюу $\frac{x}{y} = 1$ болно. Иймд $x = y$ тул

$$\frac{x^3 - 2xy^2 - 3x^2y + 7y^3}{x^3 - 2y^3} = \frac{x^3 - 2x^3 - 3x^3 + 7x^3}{x^3 - 2x^3} = -3$$

болов. 2-р бодолт.

$$\frac{x^2 + y(3x + 11y)}{xy + 2y^2} = 5 \Rightarrow x^2 + 3xy + 11y^2 = 5xy + 10y^2 \Rightarrow$$

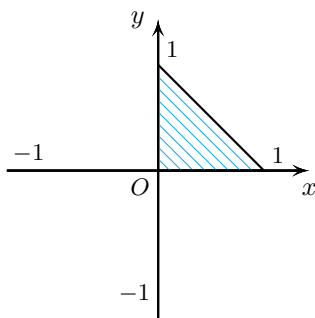
$$\begin{aligned} x^2 + 3xy + 11y^2 - 5xy - 10y^2 &= \\ = x^2 - 2xy + y^2 &= (x-y)^2 = 0 \end{aligned}$$

тул $x = y$ байна. Иймд

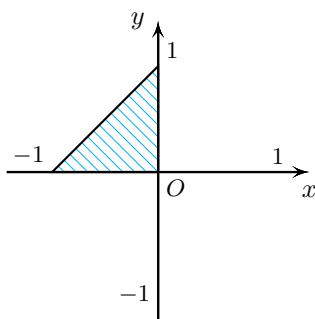
$$\frac{x^3 - 2xy^2 - 3x^2y + 7y^3}{x^3 - 2y^3} = \frac{x^3 - 2x^3 - 3x^3 + 7x^3}{x^3 - 2x^3} = -3$$

6.24. $\frac{x+y}{x-y} = 5 \Rightarrow x+y = 5(x-y) \Leftrightarrow 6y = 4x \Leftrightarrow x = 1.5y$. Үүнийг 2 дахь тэгшитгэлд орлуулбал $(1.5y)^2 + y^2 = 3.25y^2 = 13$ буюу $y^2 = 4$. Иймд $y = \pm 2$, $x = 1.5 \cdot y = \pm 3$.

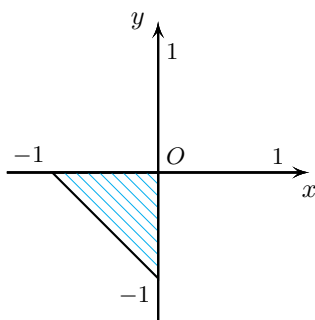
6.25. I мужид $x+y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1-x$ тул $y = 1-x$ функцийн графикаас доош орших хэсэг;



II мужид $-x+y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1+x$ тул $y = 1+x$ функцийн графикаас доош орших хэсэг;

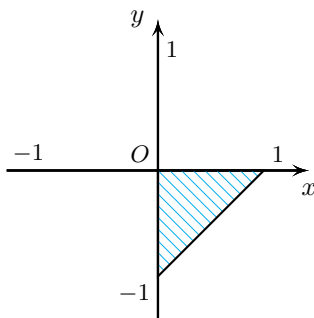


III мужид $-x-y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq x-1$ тул $y = x-1$ функцийн графикаас дээш орших хэсэг;

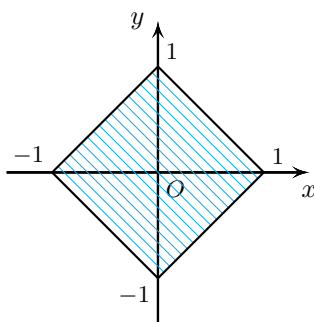


IV мужид $x-y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq -x-1$ тул $y = -x-1$ функцийн графикаас дээш орших хэсэг тус

тус байна.



Шийдүүдээ нэгтгэвэл



тул 4) хариулт зөв байна.

7. Илтгэгч, логарифм ба тригонометр тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш 2

7.1.

$$x = \log_{\frac{1}{2}} 256 = \log_{2^{-1}} 2^8 = \frac{8}{-1} \cdot \log_2 2 = -8$$

7.2. $4 > 1$ тул

$$4^{-3x} \leq 4^{21} \Leftrightarrow -3x \leq 21 \Leftrightarrow x \geq \frac{21}{-3} = -7$$

Иймд $x \in [-7; +\infty[$ байна.

7.3. $t = \log_{0.5} x$ гэвэл $t^2 + t - 2 \leq 0$ болно. Эндээс $(t+2)(t-1) \leq 0$ тул $-2 \leq t \leq 1$ буюу

$$-2 \leq \log_{0.5} x \leq 1 \Leftrightarrow 0.5^{-2} \geq x \geq 0.5^1$$

болно. Иймд $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ байна.

7.4. $t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9$, ($t > 0$) болно. Эндээс $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 9 \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 9$.

7.5.

$$\lg(x+3) - \lg(x-1) = 1 \Rightarrow \lg \frac{x+3}{x-1} = \lg 10 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} = 10.$$

Эндээс

$$x + 3 = 10(x - 1) \Rightarrow 9x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{9}$$

$\Rightarrow$ хувиргалт ашигласан тул шийдийг шалгая.

$$\lg\left(\frac{13}{9} + 3\right) - \lg\left(\frac{13}{9} - 1\right) = \lg\frac{40}{9} - \lg\frac{4}{9} = \lg\frac{40}{4} = \lg 10 = 1$$

тул шийд болж байна.

7.6. 1-р бодолт. Тодорхойлогдох муж нь $0 < x - 2$, $0 < 2x - 1$ буюу $(2; +\infty)$ муж байна. Энэ үед

$$\begin{aligned} 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) > \log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)^2 > \log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \end{aligned}$$

Эндээс $(x - 1)(x - 5) > 0$ тул $x \in (1; 5)$. Тодорхойлогдох мужаа тооцвол тэнцэтгэл бишийн шийд нь $(2; 5)$ байна. 2-р бодолт. Тодорхойлогдох мужаас А, С шийд биш. $x = 3$ нь

$$2\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2) = 0 > \log_{\frac{1}{3}}(2 \cdot 3 - 1) = \log_{\frac{1}{3}} 5$$

тул шийд болно. Иймд D, E шийд болохгүй тул зөвхөн B буюу $(2; 5)$ хариулт үлдэж байна.

7.7.

$$2^x x^2 - 9 \cdot 2^x - x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(x^2 - 9) = 0$$

тул $2^x - 1 = 0$ эсвэл $x^2 - 9 = 0$ байна. $2^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$, $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$.

7.8. $(2x)^{\log_2 x} = 4 \Leftrightarrow \log_2(2x)^{\log_2 x} = \log_2 4$ байна. Эндээс $\log_a b^k = k \log_a b$, $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ ба $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$ болохыг тооцвол

$$\log_2 x \cdot \log_2 2x = \log_2 x \cdot (1 + \log_2 x) = 2$$

болно. $t = \log_2 x$ орлуулга хийвэл $t^2 + t - 2 = 0$ тэгшитгэлд шилжинэ. Эндээс $t_1 = 1$, $t_2 = -2$ тул

$$x_1 = 2^{t_1} = 2, x_2 = 2^{t_2} = 2^{-2} = 0.25$$

байна.

7.9.

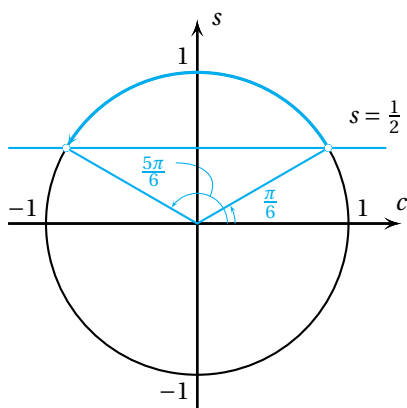
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

тул $x = \frac{\pi}{6}$ нь шийд болно.

7.10.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n \\ &\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{12} + \pi n \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3} \end{aligned}$$

7.11. $\sin x > \frac{1}{2}$. Хэрэв x өнцгийг цагийн зүүний эсрэг чиглэлд байгуулвал нэгж тойрогтой огтлолцох цэгүүд нь $s = \frac{1}{2}$ шулуунаас дээш оршино. Эндээс $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ болно.



7.12.

$$\sqrt{2} \cos 8x + \sqrt{2} \sin 8x = -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 8x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 8x = -\frac{1}{2}$$

буюу

$$\sin\left(8x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \Rightarrow x = \frac{12k - 3 + 2 \cdot (-1)^{k+1}}{96} \pi$$

болно. $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{10}$ нөхцлийг хангах шийдүүдийг олж.

$$\frac{3}{8} < \frac{12k - 3 + 2 \cdot (-1)^{k+1}}{96} < \frac{7}{10} \Rightarrow k = 4, 5, 6$$

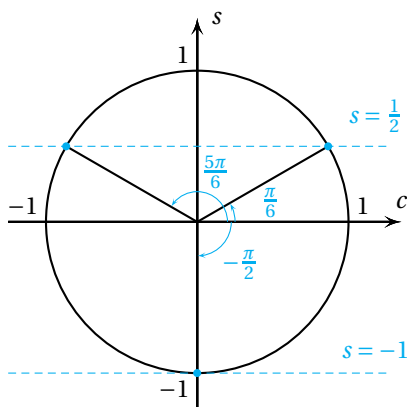
болно. $k = 4$ үед $x_4 = \frac{43}{96}\pi$, $k = 6$ үед $x_6 = \frac{67}{96}\pi \Rightarrow \frac{x_4}{x_6} = \frac{43}{67}$.

7.13. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$ ба $s = \sin x$ гэвэл

$$2s^2 + s - 1 = 0 \Rightarrow s_1 = -1, s_2 = \frac{1}{2}$$

болно. Иймд

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Эндээс $[-\pi; \pi]$ завсар дахь шийдүүд нь $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ тул үржвэр нь

$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi^3}{72}$$

байна.

7.14. $c = \cos x$ гэвэл

$$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 2c^2 + 5c + 2 = (2c + 1)(c + 2) \geq 0$$

болно. $\cos x + 2 > 0$ тул $2c + 1 \geq 0$ буюу $\cos x > -\frac{1}{2}$ болно. Тэнцэтгэл бишийн шийд нь

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

7.15.

$$\cos^2 4x + \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 4\sin^2 2x \cos^2 2x$$

тул $\sin 2x = 0$ эсвэл $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$ байна. Эхний тэгшитгэлээс $x = \frac{\pi k}{2}$ шийд гарна.

$\cos 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ тул сүүлийн тэгшитгэл нь

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$4x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

болно. Шийдүүдийг нэгтгээд эмхэтгэвэл $x = \frac{\pi k}{6}$ болно.

7.16.

$$\cos^2 x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} > \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x > \frac{1}{2}$$

Иймд

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

буюу

$$-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$$

байна. Зөв хариулт нь A буюу $]-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k[$ байна.

7.17.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

тул

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 4\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ тул

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

болно. Иймд $4x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ буюу $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ болно. Эдгээрээс $k = 0$ үед $\pm \frac{\pi}{6}$, $k = 1$ үед $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, $k = 2$ үед $\pm \frac{5\pi}{6}$ гэсэн шийдүүд өгөгдсөн завсарт оршино.

7.18. $\sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}$ тул

$$7 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}$$

болно. Эндээс $\cos \frac{x}{4} = 0$ эсвэл $7 \sin \frac{x}{4} = 2 \cos \frac{x}{2}$ байна.

$\cos \frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = 2\pi + 4\pi k$ тул $0 < x < 2\pi$ нөхцөлийг хангах шийдгүй.

$7 \sin \frac{x}{4} = 2 \cos \frac{x}{2}$ тэгшитгэлийн хувьд $s = \sin \frac{x}{4}$ гэвэл $\cos \frac{x}{2} = 1 - 2s^2$ тул $7s = 2 - 4s^2$.

Тэгшитгэлийг бодвол $s = \frac{1}{4}$ эсвэл $s = -2$ гэж гарах ба $|s| \leq 1$ тул $s = -2$ шийд биш. Иймд $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$ байна.

7.19. 1-р бодолт. $x = \frac{\pi}{2}$ үед $\sin x = 1$, $\sin 2x = \sin \pi = 0$, $\cos x = 0$ тул

$$\sin \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{1}{2} \sin \pi - \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 - 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 - 0$$

байна. Иймд $x = \frac{\pi}{2}$ шийд болж байна. 2-р бодолт.

$$\sin x - 1 = \frac{1}{2} \sin 2x - \cos x = \sin x \cos x - \cos x \Leftrightarrow$$

$$\sin x - 1 = (\sin x - 1) \cos x \Leftrightarrow (\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

тул $\sin x = 1$ эсвэл $\cos x = 1$ байна. Иймд $0 < x < \pi$ завсарт $x = \frac{\pi}{2}$ гэсэн ганцхан шийдтэй байна.

7.20.

$$\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + 5(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x + 5)(\sin x + \cos x) = 0$$

Эндээс $\sin x + \cos x + 5 > 0$ тул $\sin x + \cos x = 0$ буюу $\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$ болно. $k = -2$

үед $x = -\frac{5\pi}{4}$, $k = -1$ үед $x = -\frac{3\pi}{4}$, $k = 0$ үед $x = \frac{3\pi}{4}$ гэсэн 3 шийд $\left[-\frac{5\pi}{4}, \pi\right]$ завсарт оршино.

7.21.

$$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow 1 < t < \sqrt{3}$$

тул $1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ болно. Иймд $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$ байна.

7.22. $\sin(7x - x) = \sin 7x \cos x - \cos 7x \sin x$ тул

$$\sin 7x \cos x = \sin 6x \Leftrightarrow \cos 7x \sin x = 0$$

болно.

$$\cos 7x = 0 \Leftrightarrow 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$$

тул тэгшитгэлийн ерөнхий шийд нь $x_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $x_2 = \pi n$ байна.

7.23. $4\cos^2 x + \sin 2x = 1$ тэгшитгэлийг бодъё. Давхар өнцгийн синусын томьёо болон үндсэн адилтгал ашиглавал

$$4\cos^2 x + 2\sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

тул

$$3\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

болно. $\sin x \neq 0$ тул $\sin^2 x$ тоонд тэгшитгэлийн 2 талыг хувааж өгвөл

$$3\operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x - 1 = 0$$

тэгшитгэлд шилжинэ. Эндээс $\operatorname{ctg} x = -1$ эсвэл $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}$ тул тэгшитгэлийн шийд нь

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{3} + \pi k$$

7.24. $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$ тул

$$4\sin^4 2x - 5\cos^3 4x \leq 4 \cdot 1^4 - 5 \cdot (-1)^3 = 9$$

ба тэнцэл зөвхөн $\sin 2x = 1$, $\cos 4x = -1$ үед биелэнэ.

$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ буюу $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ба $k = 0$ үед $x = \frac{\pi}{4}$ нь хамгийн бага эерэг шийд нь бөгөөд энэ үед $\cos 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \cos \pi = -1$ тул анхны тэгшитгэлийн ч шийд болно. Иймд бидний олох хамгийн бага өнцөг нь 45° юм.

7.25. Үржвэр тус бүрийг нийлбэрт шилжүүлвэл:

$$\frac{1}{2} [\cos(7x + 6x) + \cos(6x - 7x)] = \frac{1}{2} [\cos(8x + 9x)x + \cos(8x - 9x)]$$

буюу $\cos 13x - \cos 17x = 0$ болно. Энэ ялгаварыг үржвэрт шилжүүлвэл

$$2 \cdot \sin \frac{13x + 17x}{2} \cdot \sin \frac{13x - 17x}{2} = 0$$

тул

$$\begin{cases} \sin 15x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{15} \\ x = \frac{n\pi}{2} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

8. Дараалал, Нийлбэр, Функц, Өгүүлбэртэй бодлого 2

8.1.

$$f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 2$$

8.2. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} 2x + \sin 2x}$ функц нь

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\operatorname{ctg}(-x)}{\operatorname{tg}(-2x) + \sin(-2x)} \\ &= \frac{-\operatorname{ctg} x}{-\operatorname{tg} 2x - \sin 2x} \\ &= \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} 2x + \sin 2x} = f(x) \end{aligned}$$

тул тэгш функц юм.

8.3. Логарифм ба арккосинус функцийг тодорхойлогдох мужаас $x > 0$ ба $-1 \leq \frac{x-3}{4} \leq 1$ тул $0 < x \leq 7$ ба бутархайн хуваарь тэгээс ялгаатай тул

$$\arccos \frac{x-3}{4} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{4} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 7$$

Иймд $0 < x < 7$ байна.

8.4. Гишүүд нь $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$, $x_4 = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$ тул $x_n = \frac{n}{n+1}$ байна.

8.5.

$$a_{900} - a_{100} = (900 - 100)d = -1801 - (-201) = -1600$$

тул $d = -2$ байна. Иймд

$$a_n - a_{100} = (n - 100) \cdot (-2) \Rightarrow a_n = a_{100} - 2n + 200$$

тул $a_n = -2n - 1$ байна.

8.6. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{7}$, 7 тоонууд геометр прогресс үүсгэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\sqrt[3]{7} \cdot 7 = (\sqrt[4]{7})^2 \Leftrightarrow 7^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{2}{k}} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{k}$$

тул $k = \frac{3}{2}$ байна.

8.7. $S = \frac{b_1}{1-q} \Rightarrow 9 = \frac{3}{1-q}$ буюу $q = \frac{2}{3}$ байна. Иймд $b_2 = b_1 \cdot q = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$. $\square$

8.8. $999 = 102 + 3(n-1) \Rightarrow n = 300$ байна. $a_1 = 102$, $a_{300} = 999$ тул эхний 300 гишүүний нийлбэр нь

$$S_{300} = \frac{102 + 999}{2} \cdot 300 = 165150$$

байна.

8.9.

$$S_2 = b_1 + b_1 q = 7$$

$$\begin{aligned} S_6 &= b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5 \\ &= (b_1 + b_1 q)(1 + q^2 + q^4) = 7(1 + q^2 + q^4) = 91. \end{aligned}$$

Иймд $q^4 + q^2 - 12 = 0 \Rightarrow q^2 = -4 \vee 3$. $q^2 > 0$ тул $q^2 = 3$.

$$S_4 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 = (b_1 + b_1 q)(1 + q^2) = 7 \cdot (1 + 3) = 28.$$

8.10. $b_5 = b_2 \cdot q^3$ тул $16 = 2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$ байна. $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{2}{2} = 1$ тул

$$S_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

8.11. $\sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^4 (mn) = \sum_{m=1}^6 (m \sum_{n=1}^4 n) = \sum_{m=1}^6 (m \cdot 10) = 10 \sum_{m=1}^6 m = 10 \cdot 21 = 210.$

8.12.

$$\sqrt[4]{x \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow x \sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{4})^4 \Rightarrow x = (\sqrt[3]{4})^3 = 4$$

байна.

8.13. $a_n = S_n - S_{n-1}$ байх тул

$$a_{2012} = 3^{2012} - 3^{2011} = 2 \cdot 3^{2011}$$

байна.

8.14.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}} \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{9} - \sqrt{8}) \\ &= \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

8.15. Төмсний жинг 100% гэвэл байцааных 138%, луувангийх 60% ба нийт жин нь 298% болно. 298% нь 14.9 кг болно. 138% нь

$$\begin{array}{rcl} 298\% & - & 14.9 \text{ кг} \\ 138\% & - & x \text{ кг} \end{array}$$

пропорцийг бодвол $x = \frac{138\% \cdot 14.9}{298\%} = \frac{138 \cdot 14.9}{2 \cdot 149} = \frac{13.8}{2} = 6.9$ кг болно.

8.16. Сүүлийн өдрийн $1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ хэсэг нь 6 км тул сүүлийн өдөр $6 \cdot 9 = 54$ км зам явсан. Энэ нь 2 дахь өдөр эхлэхэд үлдсэн замын хагасаас 3 км илүү байна. Иймд 2 дахь өдөр эхлэхэд $(54 - 3) \cdot 2 = 102$ км үлдсэн байжээ. Энэ нь нийт замын $\frac{2}{3}$ -оос 2 км илүү тул нийт замын $\frac{2}{3}$ нь $102 - 2 = 100$ км. Иймд нийт зам нь $100 \cdot \frac{3}{2} = 150$ км байжээ.

8.17. Заавраас харахад номын хуудасны тоо нь 3 оронтой тоо байх нь харагдаж байна. Түүнчлэн номын эхний 99 хуудсыг дугаарлахад 189 цифр шаардлагатай ба $100, 101, \dots, n$ хуудсыг дугаарлахад $3(n - 99)$ цифр шаардлагатай. Иймд

$$189 + 3(n - 99) = 756 \Rightarrow n = \frac{756 - 189 + 3 \cdot 99}{3} = 288$$

байна.

8.18. Гэрлийн шонгууд хоорондоо ижил m зайд байсан гэе. Хашааны нийт урт $(12 + 24 + 30 + 42 + 18) = 126$ тул $126/m$ гэрлийн шон хэрэгтэй. Хашааны булангуудад гэрэл байрлах тул тус бүр $\frac{12}{m} + 1, \frac{24}{m} + 1, \frac{30}{m} + 1, \frac{42}{m} + 1, \frac{18}{m} + 1$ шон байрлана. Иймд эдгээр нь бүхэл тоонууд байх ёстой бөгөөд энэ нөхцөлийг биелүүлж байхаар хамгийн их m тоог сонгох хэрэгтэй (энэ үед $126/m$ хамгийн бага байна). $m = \text{ХИЕХ}(12, 24, 30, 42, 18) = 6$ дээрх нөхцөлийг хангана. Энэ үед $126/6 = 21$ гэрлийн шон хэрэгтэй.

8.19. Б сургууль үлдсэний $\frac{5}{8}$ хэсгийг суулгасан тул В сургуулийн 195 мод нь үлдсэний $\frac{3}{8}$

байна. Иймд Б ба В сургууль нийтдээ $195 \cdot \frac{8}{3} = 520$ мод тарьсан. Энэ нь нийт модны

$1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$ хэсэг тул нийт $520 \cdot \frac{20}{13} = 800$ мод, үүнээс А сургууль $800 - 520 = 280$ мод тарьсан байна.

8.20.

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

байна. Эхний тэгшитгэлээс хоёр дахийг хасвал $\frac{1}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow y = 6$. Иймд $\frac{2}{x} + \frac{2}{6} = 1$. Эндээс $x = 3$ болов.

8.21.

	Хурд	Гүйцэх хүртэлх хугацаа	Гүйцэх хүртэлх зам	Үлдсэн хугацаа	Нийт зам
I хүн	v	$t + 1$	$v(t + 1)$	t	$v(2t + 1) = 18$
II хүн	$v + 3$	t	$(v + 3)t$	t	$2(v + 3)t$

2-р хүн t цаг яваад 1-р хүнийг гүйцсэн гэвэл 2-р хүн буцахдаа мөн t цаг явах учир нийт $2t$ цаг, 1-р хүн нийт $2t + 1$ цаг явна. Нэгдүгээр хүний хурдыг v км/цаг гэвэл

$$\begin{cases} v(2t + 1) = 18 \\ (v + 3)t = v(t + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(2t + 1) = 18 \\ v = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t^2 + t = 6 \\ v = 3t \end{cases} \text{ байна. Тэгшитгэлийг бодвол} \\ t = 1.5 \text{ цаг, } v = 4.5 \text{ км/цаг байна.}$$

8.22. Урсгал дагуу 45 км замыг $\frac{45}{v+2}$ цагт, урсгал сөрж 22 км замыг $\frac{22}{v-2}$ цагт туулах тул

$$\frac{45}{v+2} + \frac{22}{v-2} = 5 \Rightarrow 45(v-2) + 22(v+2) = 5v^2 - 20$$

болно. Эндээс

$$5v^2 - 67v + 26 = 0$$

болох тул

$$v_{1,2} = \frac{67 \pm \sqrt{67^2 - 4 \cdot 5 \cdot 26}}{2 \cdot 5} = \frac{67 \pm 63}{10}$$

ба $v_2 = \frac{4}{10} < 2$ үед урсгал сөрж явах боломжгүй тул шийд биш. Иймд $v = v_1 = 13$ байна.

$$8.23. \frac{18 \cdot 20\% + x \cdot 26\%}{18 + x} = 20\% + 4\% = 24\% \text{ тэгшитгэлээс}$$

$$18 \cdot 20 + 26x = 18 \cdot 24 + 24x \Rightarrow 2x = 18 \cdot 4 \Rightarrow x = 36$$

байна.

8.24. Охидын тоог n гэвэл хөвгүүдийн тоо $2n$, ангийн нийт сурагчдын тоо $3n$ байна. Хөвгүүдийн авсан нийт оноо $2n \cdot 82\%$, охидын авсан нийт оноо $n \cdot 85\%$, харин ангийн нийт сурагчдынх $2n \cdot 82\% + n \cdot 85\% = n \cdot 249\%$ байна. Иймд дундаж оноо нь $\frac{n \cdot 249\%}{3n} = 83\%$ байна.

8.25. Нийт хэсгийг 1 гэвэл 1 минутад I хоолой бассейны $\frac{1}{t_1}$ хэсгийг, II хоолой $\frac{1}{t_2}$ хэсгийг дүүргэнэ. Иймд

$$\begin{cases} \frac{10}{t_1} + \frac{20}{t_2} = 1 \\ \frac{t_1}{5} + \frac{t_2}{15} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Иймд $\frac{10}{t_2} = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 = \frac{1}{5} \Rightarrow t_2 = 50$ болох тул

$$\frac{10}{t_1} = 1 - \frac{20}{50} \Rightarrow t_1 = \frac{50}{3}$$

байна.

9. Функци, Уламжлал, Интеграл 2

9.1. Зурагт өгсөн график нь параболын сөрөг утга авах мужийг OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргасан байгаа тул $y = |f(x)|$ хэлбэртэй буюу $y = |x^2 + x - 2|$ байна.

9.2. $x_0 = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ цэг дээр минимум утгаа авах тул хамгийн бага утга нь

$$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + a + 5 = 6$$

байна. Эндээс $a = 5$ байна.

9.3.

$$f'(x) = 20 \cdot (3x+1)^{19} \cdot (3x+1)' = 60(3x+1)^{19}$$

$$f'(1) = 60 \cdot (3 \cdot 1 + 1)^{19} = 15 \cdot 4^{20}$$

9.4.

$$\begin{aligned} y' &= ((x-3)^2)'(x+2)^3 + (x-3)^2((x+2)^3)' \\ &= 2(x-3)^{2-1}(x+2)^3 + (x-3)^2 \cdot 3(x+2)^{3-1} \\ &= 2(x-3)(x+2)^3 + 3(x-3)^2(x+2)^2 \end{aligned}$$

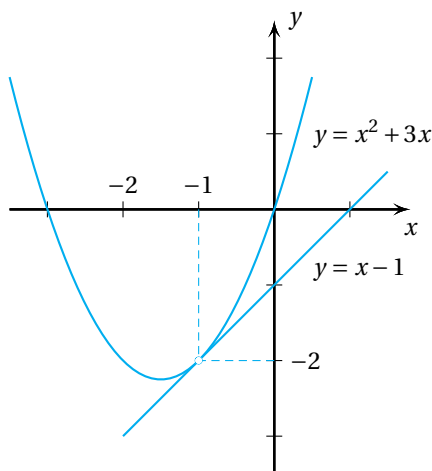
0 цэг дээр уламжлал нь

$$2(0-3)(0+2)^3 + 3(0-3)^2(0+2)^2 = -48 + 108 = 60$$

9.5. $y = \cos^2 \frac{\pi}{4}$ нь x -ээс үл хамааран тогтмол функц байна. Иймд $y' = 0$ байна.

9.6. $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ тул налалт нь $\frac{1}{\sqrt{3}}$ байна.

9.7.

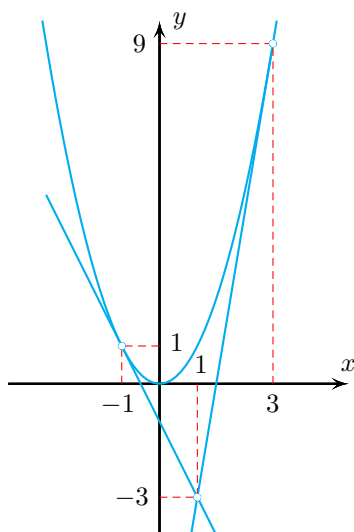


$f'(x) = 2x + 3$ ба $f(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -2$, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$ байна. Иймд функцийн графикийн $(-1, -2)$ цэгт татсан шүргэгч шулууны тэгшитгэл нь

$$y - (-2) = 1 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y = x - 1$$

байна.

9.8.



Шүргэгчдийн тэгшитгэл нь $y = -2x - 1$, $y = 6x - 9$ тул огтлолцлын цэг нь $(1, -3)$ байна.

9.9. $\forall x: f'(x) = 3x^2 + 6px + 12 > 0 \Leftrightarrow D = 36p^2 - 144 < 0 \Leftrightarrow -2 < p < 2$ байна.

9.10.

$$\left(\frac{1}{9-x^2}\right)^2 = \frac{1' \cdot (9-x^2) - 1 \cdot (9-x^2)'}{(9-x^2)^2} = \frac{2x}{(9-x^2)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 0[$$

9.11.

$$f'(x) = (8x - 4x^{-2})' = 8 - (-2) \cdot 4x^{-2-1} = 8 + \frac{8}{x^3}$$

байна. $f'(x) = 8 + \frac{8}{x^3} = 0$ тэгшитгэлийг бодож сэжигтэй цэгийг олбол $x = -1$ байна.

$x < -1$ үед $f'(x) > 0$ тул өсч, $-1 < x < 0$ үед $f'(x) < 0$ тул буурна. Иймд $x = -1$ нь максимумын цэг байна.

9.12. $t = 3^x$ гэвэл $x \leq 1$ тул $0 < t \leq 3^1 = 3$ байна. Энэ үед

$$f(x) = (3^x)^3 - 27 \cdot 3^x + 54 = t^3 - 27t + 54$$

болох тул $g(t) = t^3 - 27t + 54$ функцийн $0 < t \leq 3$ үеийн хамгийн бага утга нь бидний олох утга болно.

$$g'(t) = 3t^2 - 27$$

ба $0 < t \leq 3$ үед $g'(t) \leq 0$ тул буурах функц байна. Иймд хамгийн бага утгаа аргументийн хамгийн их утга буюу $t = 3$ үед авна. Иймд

$$f_{\min} = g_{\min} = g(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 + 54 = 0$$

байна.

9.13.

x	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	минимум	$\nearrow$	максимум	$\searrow$

Хүснэгтээс харахад $f'(x)$ нь $x < 2$ үед сөрөг, $2 < x < 5$ үед эерэг, $5 < x$ үед сөрөг байх тул $f(x)$ нь $x < 2$ үед буурч, $2 < x < 5$ үед өсөж, $5 < x$ үед буурна. Иймд 1-р өгүүлбэр үргэлж үнэн.

2-р өгүүлбэр үргэлж үнэн байх албагүй. Хэдийгээр $f(x)$ нь $x = 5$ үед локаль максимум утга мөн боловч $x < 2$ үед $f(1) > f(5)$ байх боломжтой.

3-р өгүүлбэр үргэлж үнэн байна. Учир нь $x < 2$ үед $f(x)$ буурах тул $[1; 2]$ завсрын хамгийн бага утга нь $f(2)$, $2 < x < 5$ завсарт өсөх тул $[2; 5]$ завсрын хамгийн бага утга нь мөн л $f(2)$ байна. Иймд $f(2)$ нь $[1; 5]$ завсрын хамгийн бага утга байна.

9.14. $x'(t) = 3t^2 - 8t$, $x''(t) = 6t - 8$ тул $x''(3) = 6 \cdot 3 - 8 = 10$.9.15. $\int \cos 3x \, dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$ байна.

9.16.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - 3 \sqrt[3]{x^2} + C$$

9.17.

$$\int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + C = -e^{-x} + C$$

9.18.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2} dx &= \int_1^2 2x + \frac{1}{x^2} dx = \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(2^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(1^2 - \frac{1}{1} \right) = 3.5 \end{aligned}$$

9.19. $f(x) = \frac{5}{3+5x}$, $g(x) = e^x$ гээд оруулгын аргаар бодвол

$$\int f(x) dx = \int \frac{5}{3+5x} dx = \ln(3+5x) + C$$

ба $g'(x) = e^x$ тул

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} f[g(x)]g'(x) dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{5}{3+e^x} \cdot e^x dx = \int_0^{\ln 3} \frac{5}{3+e^x} de^x \\ &= \int_{e^0}^{e^{\ln 3}} \frac{5}{3+t} dt = \int_1^3 \frac{5}{3+t} dt \\ &= \ln(3+5 \cdot 3) - \ln(3+5 \cdot 1) = \ln \frac{9}{4} \end{aligned}$$

9.20.

$$\begin{aligned} \int_0^3 |1-x^2| dx &= \int_0^1 (1-x^2) dx + \int_1^3 (x^2-1) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 0 + (9-3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

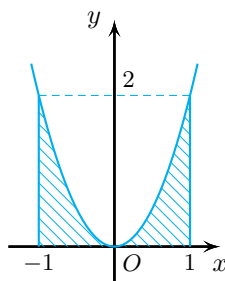
9.21.

$$\left(\int_0^x \cos 3t dt \right)' = \cos 3x$$

9.22. $x+y=2 \Rightarrow y=2-x$. Үүнийг $y=x^2$ -д оруулж бодвол $x^2+x-2=0$ тэгшитгэлээс $\alpha=-2$, $\beta=1$ байна. Иймд зааварт өгсөн томьёо ёсоор

$$\int_{-2}^1 (x+2)(x-1) dx = \frac{(1-(-2))^3}{6} = \frac{9}{2} = 4.5$$

9.23. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 0$ гээд $\alpha = -1$, $\beta = 1$ гээд талбайг олбол $\int_{-1}^1 2x^2 dx$ болох ба энэ интегралаар илэрхийлэгдэх талбай нь 4) байна.



Жич: 1) дүрсийн талбай нь $\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$; 2) дүрсийн талбай нь $\int_0^1 2x^2 dx$; 3) дүрсийн талбай нь $\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx$, 5) дүрсийн талбай нь $\int_{-1}^1 2 dx$ байна.

9.24.

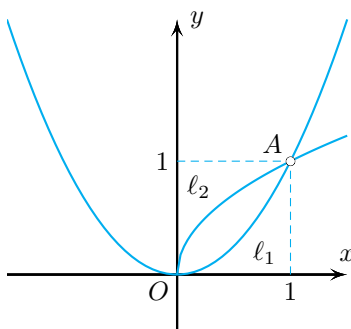
$$f'(x) = (x + 8x^{-2})' = 1 - \frac{16}{x^3}$$

байна. $x \in [-2; -1]$ үед $f'(x) \geq 1 - \frac{16}{(-2)^3} > 0$ тул $f(x)$ функц $[-2, -1]$ мужид өснө. Иймд

$f(x)$ функцийн хамгийн их утга нь $f(-1) = -1 + \frac{8}{(-1)^2} = 7$, хамгийн бага утга нь

$f(-2) = -2 + \frac{8}{(-2)^2} = 0$ ба нийлбэр нь $7 + 0 = 7$ байна.

9.25.



ℓ_1 ба ℓ_2 -ын огтлолын цэгт $x^2 = \sqrt{x}$ тул $x = 0$, $x = 1 \Rightarrow x = 1$, $y = 1$ байна.

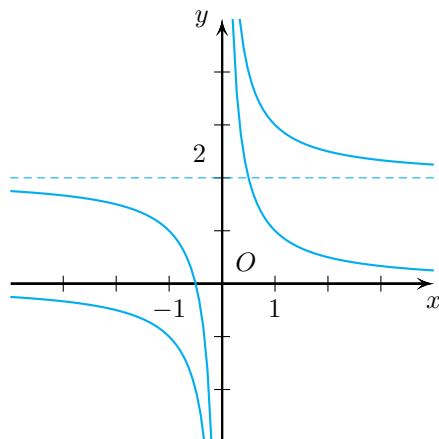
$$1. V_1 = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

$$2. V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$3. V_3 = V_2 - V_1 = \frac{3}{10} \pi.$$

10. Алгебр сэдвийн давтлага 2

10.1.



зургаас харахад $f(x)$ функцийн график I, II, III мужид зурагдсан байна.

10.2. 1-р бодолт.

$$\left| \frac{3 \cdot (-3) - 4}{3 - (-3)} \right| = \frac{13}{6} > 2, \quad \left| \frac{3 \cdot (-2) - 4}{3 - (-2)} \right| = 2 \leq 2, \quad \left| \frac{3 \cdot 0 - 4}{3 - 0} \right| = \frac{4}{3} < 2,$$

$$\left| \frac{3 \cdot 2 - 4}{3 - 2} \right| = 2 \leq 2, \quad \left| \frac{3 \cdot 3 - 4}{3 - 3} \right| = \text{утгагүй}$$

тул $-3, 3$ шийд болохгүй бусад нь шийд болж байна. Иймд $-2, 0, 2$ -ийг агуулсан $-3, 3$ агуулаагүй хариулт буюу $-2 \leq x \leq 2$ нь зөв хариулт байна. 2-р бодолт. Тэнцэтгэл биш нь

$$\begin{cases} -2 \leq \frac{3x-4}{3-x} \\ \frac{3x-4}{3-x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-4}{3-x} + \frac{2(3-x)}{3-x} \geq 0 \\ \frac{3x-4}{3-x} - \frac{2(3-x)}{3-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-4}{3-x} + \frac{2(3-x)}{3-x} \geq 0 \\ \frac{3x-4}{3-x} - \frac{2(3-x)}{3-x} \leq 0 \end{cases}$$

буюу

$$\begin{cases} \frac{3x-4+2(3-x)}{3-x} \geq 0 \\ \frac{3x-4-2(3-x)}{3-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} \leq 0 \\ \frac{x-3}{x-3} \geq 0 \end{cases}$$

болно. Эхний тэнцэтгэл бишийн шийд нь $[-2; 3]$, хоёр дахь тэнцэтгэл бишийн шийд нь $] -\infty; 2] \cup] 3; +\infty[$ ба огтлолцол нь $[-2; 2]$ буюу $-2 \leq x \leq 2$ байна.

10.3. 1-р бодолт. $x = -1$ нь

$$\begin{aligned} 4 \cdot 16^{-1} + 5 \cdot 12^{-1} &= \frac{4}{16} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 6 \cdot 9^{-1} \end{aligned}$$

тул шийд болно. Иймд $-1, \pm 1$ гэсэн сонголтууд үлдэж байна. $x = 1$ нь

$$4 \cdot 16 + 5 \cdot 12 = 64 + 60 = 124 \neq 6 \cdot 9$$

тул шийд болохгүй. Иймд зөв хариулт нь -1 буюу А сонголт байна. 2-р бодолт. Тэгшитгэлийг 9^x -д хуваавал

$$4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 6 = 0$$

болно. $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ гэвэл

$$4t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{3}{4}, t_2 = -2$$

болно. $t > 0$ тул $t = \frac{3}{4}$ нь шийд болно. Эндээс $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4}$ тул $x = -1$ байна.

10.4. 1-р бодолт. А хариултын хувьд нийт давсны хэмжээ нь $10 \cdot \frac{0.5}{100} + 20 \cdot \frac{2}{100}$ тул

концентраци нь $\frac{10 \cdot \frac{0.5}{100} + 20 \cdot \frac{2}{100}}{30} \cdot 100\% = \frac{5 + 40}{30} \% = 1.5\%$ тул зөв хариу болж байна. 2-р бодолт.

$$\frac{0.5\% + 2\% \cdot \alpha}{1 + \alpha} = 1.5\% \Leftrightarrow 0.5 + 2\alpha = 1.5 + 1.5\alpha$$

буюу $\alpha = 2$ байна. Иймд 1 : 2 хэмжээгээр нийт 30 л уусмал гаргаж авах тул 10; 20 л-ийг тус тус холино.

10.5. 1-р бодолт. $x = 1\frac{1}{3}$, $x = 28$ тоонууд тэнцэтгэл бишийн шийд, $x = 10$ шийд биш тул зөвхөн $(1; 4] \cup [28; +\infty)$ хариу зөв байна. 2-р бодолт. $t = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$ гэвэл

$$t^2 + 3 \geq -4t \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = (t + 3)(t + 1) \geq 0$$

болно. Иймд $t \leq -3 \vee t \geq -1$ болох тул $x > 1$ үед

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \leq -3 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \\ x - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 27 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

болно. Иймд тэнцэтгэл бишийн шийд нь $(1; 4] \cup [28; +\infty)$ байна.

10.6. Тодорхойлогдох муж нь $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ байна. Үржвэр тэгтэй тэнцэхийн тулд ядаж нэг үржигдэхүүн нь 0-тэй тэнцүү тул

$$x^2 - 4 = 0 \vee \sqrt{2x - 3} = 0 \Rightarrow x = \pm 2, x = \frac{3}{2}$$

байна. Гэвч $x = -2$ нь тодорхойлогдох мужид орохгүй тул шийд болж чадахгүй.

10.7. $2\sin^2 x > \sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 x > \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x \cdot (\sin x - \cos x) > 0$. Иймд

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x > \cos x \end{cases} \cup \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin x < \cos x \end{cases} \text{ байна. Эхний тэнцэтгэл бишийн шийд нь } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

байна. Хоёр дахь тэнцэтгэл бишийн шийд нь $x \in \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

10.8. $a = \sqrt[4]{x+8}$, $b = \sqrt[4]{8-x}$ гэвэл $a^4 + b^4 = 16$, $a - b = 2$ тул

$$a^4 + (a - 2)^4 = 16 \Leftrightarrow 2a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a = 0$$

болно. Энэ тэгшитгэл $a = 0$, $a = 2$ гэсэн хялбар шийдүүдтэй тул

$$2a(a - 2)(a^2 - 2a + 8) = 0$$

болж задарна. $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 < 0$ тул $a^2 - 2a + 8 \neq 0$, $a = 0$ үед $b = \sqrt[4]{8-x} = -2$ болоход хүрэх тул зөвхөн $a = 2$ үед анхны тэгшитгэл шийдтэй байна. Иймд $\sqrt[4]{x+8} = 2 \Rightarrow x = 8$ ба шийд болохыг нь шалгах төвөгтэй биш юм.

10.9. $x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = 3$ буюу $x^2 - 4x + 1 = 0$.

10.10. 1-р бодолт. $x = 2$ нь шийд биш юм. Учир нь

$$\sqrt{2+3} + \sqrt{2-2} < \sqrt{4 \cdot 2 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{5} < 3$$

Иймд 2-ийг агуулаагүй E нь зөв сонголт юм. 2-р бодолт. Тодорхойлогдох муж нь

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 4x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 2 \\ x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

байна.

Тодорхойлогдох муждаа тэнцэтгэл бишийн хоёр тал хоёулаа сөрөг биш тул

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} &> \sqrt{4x+1} \Leftrightarrow \\ (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2})^2 &> (\sqrt{4x+1})^2 \Leftrightarrow \\ x+3 + 2\sqrt{x+3}\sqrt{x-2} + x-2 &> 4x+1 \Leftrightarrow \\ \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-2} &> x \end{aligned}$$

болно.

Тодорхойлогдох муж нь $x \geq 2$ тул

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-2} > x &\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-2})^2 > x^2 \Leftrightarrow \\ (x+3)(x-2) > x^2 &\Leftrightarrow x-6 > 0 \end{aligned}$$

10.11. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ тул

$$P(x) = (x-1)(x-2) \cdot Q(x) + ax + b, R(x) = ax + b \cdots (1)$$

болно. $P(x)$ -г $(x-1)$ -д хуваахад 1 үлдэх тул $P(1) = a + b = 1$. Нөгөө талаас

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

тул

$$P(x) = (x+1)(x-2) \cdot K(x) + 3x + 7$$

байна. $P(2) = 3 \cdot 2 + 7 = 13$ болох ба $x = 2$ -ийг (1)-д орлуулбал $P(2) = 2a + b = 13$. Эндээс a , b -г олж.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=13 \end{cases}$$

Системийг бодож шийдийг олбол $a = 12$, $b = -11$ тул $R(x) = 12x - 11$ байна.

10.12. ХБЕХ(10, 26, 5) = 130 тул нийт сурагчдын тоо 130-д хуваагддаг байх ёстой. Иймд 130 k сурагч байсан гэе. Тэгвэл $130k \cdot \frac{1}{10} = 13k$ нь онц, $130k \cdot \frac{5}{26} = 25k$ нь сайн, $130k \cdot \frac{3}{5} = 78k$ нь дунд сурсан байна. Иймд хангалтгүй сурсан

$$130k - 13k - 25k - 78k = 14k$$

сурагч байна. Бид боломжит хамгийн цөөнийг нь сонирхож буй тул $k = 1$ үед 14 сурагч хангалтгүй дүн авна.

10.13.

$$(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1) = (x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1) = x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 1$$

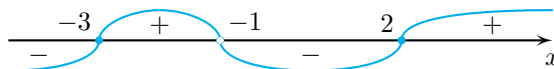
тул

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1) dx &= \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - x + C = \\ &= \frac{6x^{\frac{11}{6}}}{11} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - x + C \end{aligned}$$

10.14. $1+x \neq 0$ буюу $x \neq -1$ үед

$$\frac{(x-2)(x+3)}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1)(x-2) \geq 0$$

ба



тул $x \in [-3; -1] \cup [2; +\infty[$

10.15. 1 оронтой 9 тоо, 2 оронтой 90 тоо, 3 оронтой 271 тоо байгаа тул нийт

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 271 \cdot 3 = 1002$$

цифр ашиглана.

10.16. 1-р бодолт. $x < -\frac{2}{3}$ мужид $2x+1 < 0$, $3x+2 < 0$ тул $|2x+1| = -(2x+1)$, $|3x+2| = -(3x+2)$ болно. Иймд

$$|2x+1| + |3x+2| = -2x-1-3x-2 \leq 5x+3$$

тул

$$-5x-3 \leq 5x+3 \Leftrightarrow -6 \leq 10x \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \leq x$$

болно. Эндээс $-\frac{3}{5} \leq x < -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{3}{5} < -\frac{2}{3}$ болж зөрчил үүсч байна. Иймд $x < -\frac{2}{3}$ мужид тэнцэтгэл биш шийдгүй.

$-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$ мужид $2x+1 < 0$, $3x+2 \geq 0$ тул $|2x+1| = -(2x+1)$, $|3x+2| = 3x+2$ болно. Иймд

$$|2x+1| + |3x+2| = -2x-1+3x+2 \leq 5x+3$$

тул

$$x+1 \leq 5x+3 \Leftrightarrow -2 \leq 4x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x$$

болно. Эндээс $-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ болж зөрчил үүсч байна. Иймд $-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$ мужид тэнцэтгэл биш мөн л шийдгүй.

$-\frac{1}{2} \leq x$ мужид $2x+1 \geq 0$, $3x+2 \geq 0$ тул $|2x+1| = 2x+1$, $|3x+2| = 3x+2$ болно. Иймд

$$|2x+1| + |3x+2| = 2x+1 + 3x+2 \leq 5x+3$$

тул

$$5x+3 \leq 5x+3$$

болох ба энэ тэнцэтгэл биш нь дурын x тооны хувьд биелэх тул $-\frac{1}{2} \leq x$ муж бүхлээрээ шийд болно.

Шийдүүдээ нэгтгэвэл бодлогын шийд $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ болно. 2-р бодолт. $x = -0.75$ нь $|-1.5+1| + |-2.25+2| = 0.75 > -3.85+3 = -0.85$ тул шийд болохгүй. $x = -0.5$ нь $|-1+1| + |-1.5+1| = 0.5 \leq -2.5+3 = 0.5$ тул шийд болно. $x = 0$ нь $|0+1| + |0+2| = 3 \leq 0+3 = 3$ тул мөн шийд болно. Хариултууд дотроос -0.75 ороогүй, $-0.5, 0$ орсон муж нь зөвхөн $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ тул зөв хариулт болно.

10.17. $t = \frac{x-2y}{5x+2y}$ гэвэл $\frac{1}{t} = \frac{5x+2y}{x-2y}$ тул $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$ байна. Иймд

$$\frac{x-2y}{5x+2y} = 1$$

$x - y = 8$ -аас $y = x - 8$ тул

$$\frac{x-2y}{5x+2y} = \frac{x-2(x-8)}{5x+2(x-8)} = 1$$

Иймд $16 - x = 7x - 16 \Rightarrow x = 4$, $y = 4 - 8 = -4$ болох тул $x \cdot y = 4 \cdot (-4) = -16$ байна.

10.18. $f'(x) = 2x - 3$ тул $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$, $f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$. Иймд

$$y - (-2) = -1 \cdot (x - 1)$$

буюу $y = -x - 1$ байна.

10.19.

$$\frac{x^2 - 2y(3x - 5y)}{-xy + 3y^2} = 2 \Rightarrow x^2 - 6xy + 10y^2 = -2xy + 6y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6xy + 10y^2 + 2xy - 6y^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2 = 0$$

тул $x = 2y$ байна. Иймд

$$\frac{x^3 + 2xy^2 - 3x^2y + 6y^3}{x^3 - 2y^3} = \frac{(2y)^3 + 2(2y)y^2 - 3(2y)^2y + 6y^3}{(2y)^3 - 2y^3} = \frac{6y^2}{6y^2} = 1$$

10.20. Хоёр автобус 1 цагт хамтдаа

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{9}{40}$$

хэсгийг туулах тул 4 цагт $4 \cdot \frac{9}{40} = \frac{9}{10}$ хэсгийг туулна. Иймд үлдэх зам нь нийт замын $\frac{1}{10}$ хэсэг тул нийт зам нь $40 \cdot 10 = 400$ км зайтай байжээ.

10.21. $x < -2$ үед $|2x+4| = -2x-4$, $|x-1| = -x+1$ тул

$$-2x-4 - x+1 = 10 \Leftrightarrow -3x = 13 \Rightarrow x = -\frac{13}{3}$$

ба $-\frac{13}{3} < -2$ тул шийд болно.

$-2 \leq x < 1$ үед $|2x+4| = 2x+4$, $|x-1| = -x+1$ тул

$$2x+4-x+1=10 \Leftrightarrow x=5$$

боловч $-2 \leq x < 1$ мужид орохгүй тул шийд болохгүй.

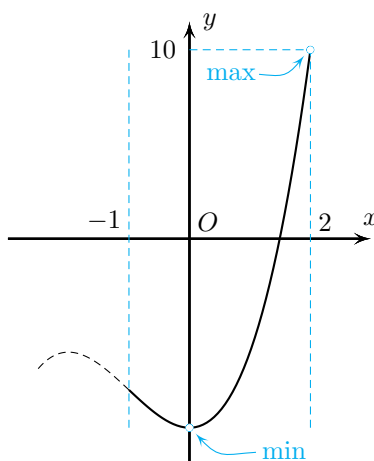
$1 \leq x$ үед $|2x+4| = 2x+4$, $|x-1| = x-1$ тул

$$2x+4+x-1=10 \Leftrightarrow 3x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

ба $1 \leq \frac{7}{3}$ тул шийд болно.

Иймд шийдүүдийн нийлбэр нь $-\frac{13}{3} + \frac{7}{3} = -2$ байна.

10.22.



$f'(x) = 3ax^2 + 6ax = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$. Тэгвэл $x = 0$ цэг дээр хамгийн бага утгатай. Иймд $f(0) = b = -10$. Түүнчлэн $x = -1, x = 2$ -ийн аль нэг дээр хамгийн их утгатай байна.
 $f(-1) = 2a - 10, f(2) = 20a - 10$ ба $a > 0$ тул

$$f(2) > f(-1)$$

буюу $x = 2$ үед хамгийн их утгатай. Иймд $20a - 10 = 10 \Rightarrow a = 1$ тул $|a+b| = |1-10| = 9$.

10.23.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \\ &= \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C \\ &= \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C \end{aligned}$$

байна. Иймд

$$f(4) = \ln \left| \frac{4-3}{4-2} \right| + C = \ln \frac{1}{2} + C = -\ln 2 + C$$

байна. Нөгөө талаас $f(4) = -\ln 2$ тул $C = 0$ болов. Иймд $f(x) = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$ байна.

10.24. Мужийг у тэнхлэгийг тойруулан эргүүлж байгаа учраас у-тэнхлэгт перпендикуляр зүсэлт (хөндлөн огтлол нь дугуй байхаар) хийж у-ээр интегралчлах нь зүйтэй. Хэрэв у өндөрт зүсэлт хийвэл x радиустай дугуй диск үүсэх бөгөөд $x = \sqrt[3]{y}$ байна. Иймд у цэгийг дайрсан хөндлөн огтлолын талбай нь

$$S(y) = \pi x^2 = \pi y^{\frac{2}{3}}$$

болно. Бие $y = 0$, $y = 8$ хавтгайн хооронд орших тул эзлэхүүн нь

$$V = \int_0^8 S(y) dy = \int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

гэж олдоно.

10.25. Эхний хоолойг 10 минут, хоёрдугаар хоолойг 20 минут ажиллуулбал бассейн дүүрнэ. Иймд эхний хоолойг 5 минут, хоёрдугаар хоолойг 10 минут ажиллуулахад бассейны хагас нь дүүрнэ. Эндээс хоёрдугаар хоолойг 5 минут ажиллуулахад бассейны $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ хэсэг дүүрэх тул 50 минутад хоёрдугаар хоолой бассейныг дүүргэнэ.

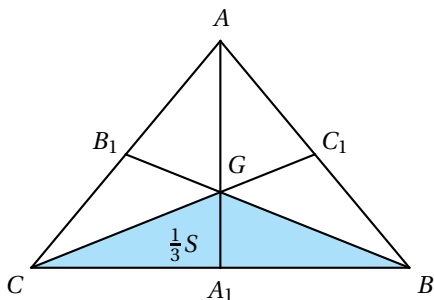
Хоёрдугаар хоолойг 20 минут ажиллуулбал бассейны $\frac{20}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ хэсэг дүүрнэ. Эндээс 10 минутанд эхний хоолой бассейны $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ хэсгийг дүүргэнэ. Иймд $10 : \frac{3}{5} = \frac{50}{3}$ минутад нэгдүгээр хоолой бассейныг дүүргэнэ.

11. Хавтгайн геометр 2

11.1.

$$\alpha = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$$

11.2. Сууриас татсан медианы уртыг m гэвэл хүндийн төвөөс суурийн орой хүртэлх зай $\frac{2}{3}m$ байна.



$$S_{\triangle BGC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}m\right)^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{3}S = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}m\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{\sin 120^\circ}{2} = \frac{4}{3}$$

байна. Суурийн урт нь косинусын теоремоор

$$BC = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{2}{3}m\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}m\right)^2 \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$$

11.3. Их тал нь 7 тул түүний эсрэг орших өнцгийн косинус нь:

$$\cos \alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{1}{5}$$

байна.

11.4. Гурвалжны өнцгүүдийн нийлбэр 180° тул

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$$

Иймд синусын теоремоор

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ} \Rightarrow BC = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 75^\circ$$

болно.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{ба } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ тул}$$

$$BC = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{12 + 12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 6$$

11.5.

$$\ell = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{12\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{5} = 2.4$$

11.6. $BC_1 = 2 \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ байна. Нөгөө талаас $\triangle BC_1H$ тэгш өнцөгт гурвалжнаас $\cos \angle B_1BA = \cos \angle HBC_1 = \frac{BC_1}{BH}$ тул

$$BH = \frac{BC_1}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} : 3$$

байна.

11.7. Медианы уртыг олох томъёоноос хамгийн урт медиан нь богино талд буусан медиан байх тул

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{2(7^2 + 8^2) - 5^2} = \frac{\sqrt{201}}{2}$$

байна.

11.8. Адил хажуут тул оройгоос буусан өндөр нь сууриа 5, 5 урттай хэсгүүдэд хуваана. Өндрийг Пифагорын теоремоор олбол

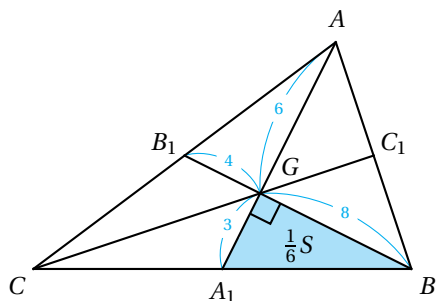
$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

тул талбай нь

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$$

байна.

11.9.



Гурвалжны медианууд гурвалжинг тэнцүү талбайтай 6 жижиг гурвалжинд хуваадаг. Мөн оройгоос 2 : 1 харьцаатай хуваагддаг тул нэг нь 3,8 талтай тэгш өнцөгт гурвалжин байна. Иймд жижиг гурвалжны талбай $\frac{3 \cdot 8}{2} = 12$, том гурвалжны талбай $6 \cdot 12 = 72$ байна.

11.10. Төсөөгийн коэффициент нь $k = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ байна. Гурвалжнуудын талбайг S_1, S_2 гэвэл $S_1 + S_2 = 87$ см.кв ба

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

тул $S_2 = \frac{25}{4} S_1$ байна. Үүнийг эхний тэгшитгэлд орлуулбал:

$$S_1 + \frac{25}{4} S_1 = 87 \Rightarrow S_1 = \frac{87 \cdot 4}{29} = 12$$

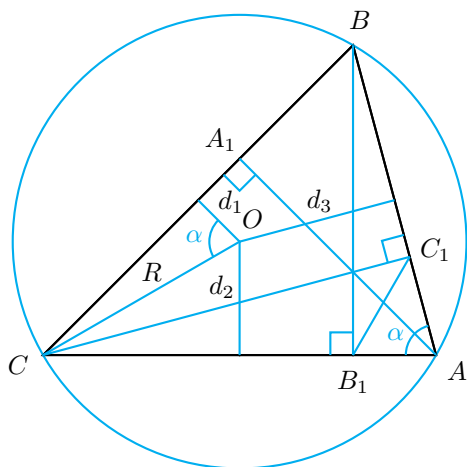
байна.

11.11. Биссектриссийн чанар ёсоор

$$\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{NC} \Leftrightarrow \frac{8}{x+2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow 8x = 5x + 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

байна.

11.12.



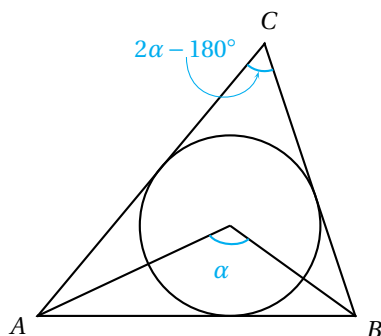
Багтаасан тойргийн төвийг O , өндрүүдийн суурийг A_1, B_1, C_1 , багтаасан тойргийн төвөөс талууд хүртэлх зайг d_1, d_2, d_3 гэе. $AB_1 = AB \cos \alpha$, $AC_1 = AC \cos \alpha$ ба A орой дахь өнцөг ерөнхий тул $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ байна. Иймд $B_1C_1 = BC \cos \alpha$. Үүнтэй төстэйгээр $A_1B_1 = AB \cos \gamma$, $A_1C_1 = AC \cos \beta$. Мөн $\angle BOC = 2\alpha$ тул $d_1 = R \cos \alpha$ болно. Мөн адил шалтгаанаар $d_2 = R \cos \beta$, $d_3 = R \cos \gamma$.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{AB \cdot d_1 + AC \cdot d_2 + BC \cdot d_3}{2} \\
 &= \frac{AB \cdot R \cos \gamma + AC \cdot R \cos \beta + BC \cdot R \cos \alpha}{2} \\
 &= \frac{R(A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1)}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 9\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

11.13.

$$r \cdot R = \frac{S}{p} \cdot \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4p} = \frac{abc}{2(a+b+c)} = \frac{6 \cdot 25 \cdot 29}{2 \cdot (6+25+29)} = 36.25$$

11.14.



Багтсан тойргийн төвөөс гурвалжны аль нэг тал α өнцгөөр харагдах бол суурийн хоёр өнцгийн нийлбэр нь $180^\circ - \alpha$ байна. Эдгээр өнцгүүд нь том гурвалжны өнцгийн хагас өнцгүүд тул том гурвалжны суурийн өнцгүүдийн нийлбэр $2 \cdot (180^\circ - \alpha) = 360^\circ - 2\alpha$ байна. Орой дахь өнцөг нь энэ нийлбэрийн 180° хүртэлх гүйцээлт тул

$$180^\circ - (360^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 180^\circ$$

байна.

Гурвалжны орой дахь өнцгийн косинус нь

$$\cos(2\alpha - 180^\circ) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

байна. Иймд косинусын теоремоор

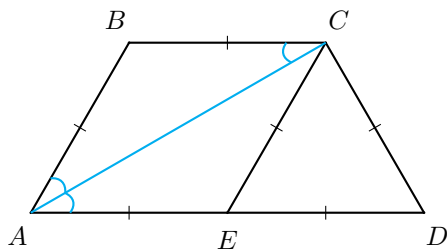
$$a^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 81$$

тул гурав дахь тал нь $a = 9$ байна.

11.15. Параллелограммын чанар ба бодлогын нөхцөлөөс

$$e^2 + 6^2 = 2 \cdot 50 \Rightarrow e^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow e = 8$$

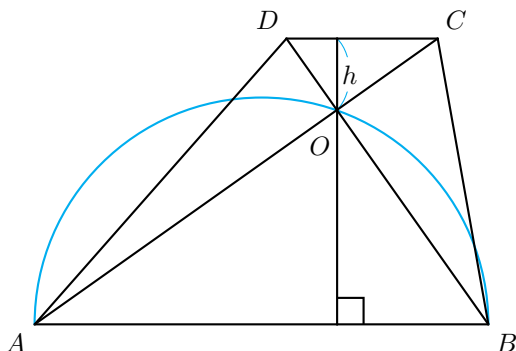
11.16. Их суурийг AD , бага суурийг BC , AD хэрчмийн дундажыг E гэвэл $\vec{BC} = \vec{AE}$ тул $ABCE$ параллелограмм болно.



Солбисон өнцгүүд тул $\angle EAC = \angle ACB$ ($AD \parallel BC$). Мөн AC биссектрис тул $\angle ACB = \angle BAC$ болох тул $\triangle ABC$ адил хажуут байна. Эндээс $ABCE$ ромбо болно.

$ED = \frac{AD}{2} = BC = AB = CD = CE$ тул $\triangle CED$ зөв гурвалжин байна. Иймд трапецийн хурц өнцөг буюу $\angle ADE = 60^\circ$ байна.

11.17.



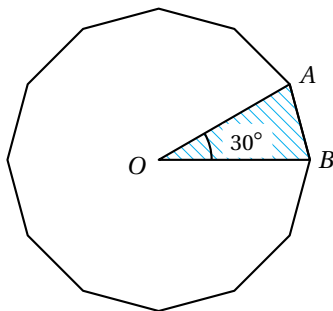
$AB = 3$, $CD = 1$, $AB \parallel CD$ гэе. Диагоналиудын огтлолцолын цэг O нь AB диаметртэй тойрог дээр байна. O цэгээс CD хүртэлх зай h ба $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (төсөөгийн коэффициент нь $\frac{AB}{CD} = 3$) тул O цэгээс AB хүртэлх зай $3h$, трапецийн өндөр нь $4h$, талбай нь

$$\frac{1+3}{2} \cdot 4h = 8h$$

байна. $3h$ нь AB диаметртэй тойргийн радиус буюу $3h = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{2}$ үед трапецийн өндөр хамгийн их байна. Иймд

$$\max S = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

11.18. Зөв 12 өнцөгтийн талбай нь зураг дээрх OAB -гурвалжны талбайгаас 12 дахин их байна.



OAB гурвалжны талбай

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

тул зөв 12 өнцөгтийн талбай $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ байна.

11.19. $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 2 : 3 : 4 : 9$ тул $\widehat{AB} = 2x$, $\widehat{BC} = 3x$, $\widehat{CD} = 4x$, $\widehat{DA} = 9x$ байна.

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 18x = 360^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

Иймд $\widehat{BC} = 3x = 60^\circ$, $\widehat{AD} = 9x = 180^\circ$ тул

$$\alpha = \frac{60^\circ + 180^\circ}{2} = 120^\circ$$

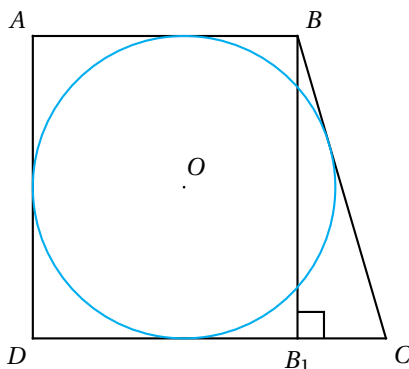
11.20. d диагоналын урт бол багтаасан тойргийн радиус нь $R = \frac{d}{2}$, багтсан тойргийн

радиус нь квадратын талын уртын хагас буюу $r = \frac{d}{2\sqrt{2}}$ байна. Иймд уртуудын харьцаа нь

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

байна.

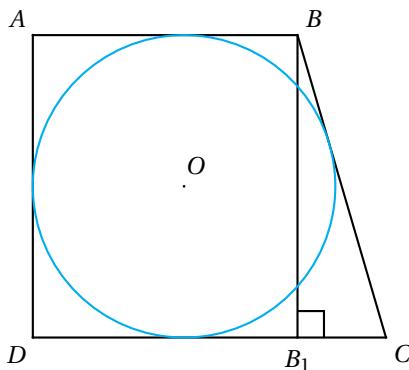
11.21. 1-р бодолт. 30 дм=3 м.



$AD = 2 \cdot 3 = 6$ м. Тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн чанараар

$$AB + CD = 6 + \frac{82}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ м}$$

Энэ нь зөвхөн C хариултын хувьд биелэх тул зөв хариулт нь C юм. 2-р бодолт. 30 дм=3 м.



$AD = 2 \cdot 3 = 6$. Тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн чанараар

$$AB + CD = 6 + \frac{82}{3} = 33\frac{1}{3} \quad (*)$$

$\triangle BB_1C$ тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичвэл

$$B_1C^2 = BC^2 - BB_1^2$$

буюу

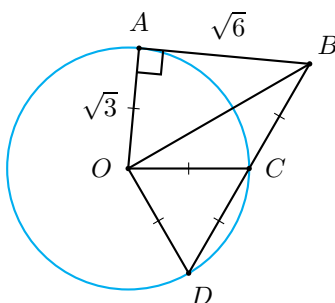
$$(CD - AB)^2 = \left(\frac{82}{3}\right)^2 - 6^2 = \frac{82^2 - 18^2}{9} = \frac{6400}{9}$$

тул

$$CD - AB = \frac{80}{3} \quad (**)$$

$(*)$, $(**)$ -г нэмбэл $2CD = \frac{100}{3} + \frac{80}{3} = 60 \Rightarrow CD = 30$, $AB = 33\frac{1}{3} - 30 = \frac{10}{3}$ болно.

11.22.



$\triangle OCD$ нь адил хажуут гурвалжин ба оройн өнцөг нь 60° тул суурийн өнцгүүд нь

$$\alpha = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

тул зөв гурвалжин байна. Иймд

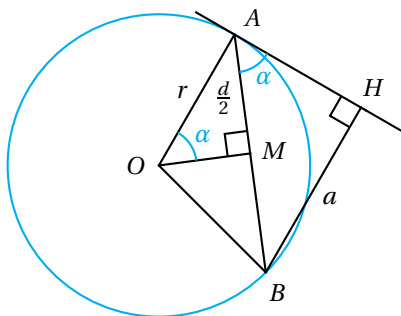
$$OA = OC = OD = CD = BC = R$$

ба $BD = 2R$ байна. Шүргэгч ба огтлогчийн чанараар $BA^2 = BC \cdot BD$ тул

$$(\sqrt{6})^2 = R \cdot 2R \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

Пифагорын теоремоор $OB^2 = OA^2 + BA^2$ тул $OB^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 = 9$ тул $OB = 3$ байна.

11.23.



$AB = d$, AB -ийн дундаж цэг нь M бол $\angle AOM = \angle BAN = \alpha$, M ба N орой дахь өнцгүүд нь 90° тул $\triangle AOM \sim \triangle BAN$ байна. Иймд

$$\frac{OA}{AM} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow \frac{r}{\frac{d}{2}} = \frac{d}{a}$$

гэдгээс $d = \sqrt{2ar}$ байна.

11.24.

1. Косинусын теоремоор:

$$\cos \beta = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$\sin \beta > 0$ тул үндсэн адилтгалаар

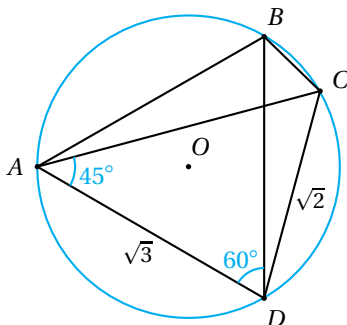
$$\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$2. S = \frac{1}{2}ca \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ байна.}$$

$$3. r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2+\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{7}}{2(3+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}(3-\sqrt{2})}{14}$$

$$4. R = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{14}}{7} \text{ байна.}$$

11.25.



$$\triangle ACD \text{ гурвалжны хувьд синусын теорем бичвэл } 2R = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \Rightarrow R = 1.$$

Нэг нумд тулсан өнцгүүд тул $\angle BDC = \angle BAC$ байна. $\sin \angle ABD = \frac{AD}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ тул $\angle ABC = 60^\circ$ байна. Иймд

$$\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$\triangle ABD$ нь зөв гурвалжин тул $AB = \sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 3$ байна.

12. Огторгуйн геометр 2

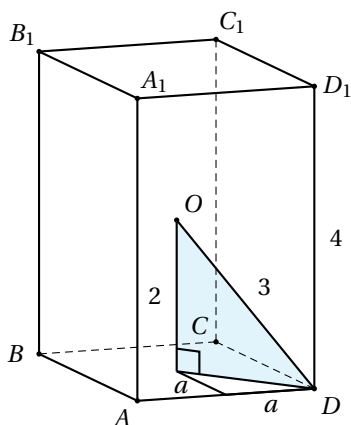
12.1. $\sqrt{3}a = 10$ тул $a = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ байна. Иймд $V = a^3 = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 1000$ байна.

12.2. Талуудын уртыг нь a, b, c гэвэл эзлэхүүн нь $V_1 = abc$ шинээр үүсэх параллелепипедийн талууд $3a, 3b, 3c$ тул эзлэхүүн нь

$$V_2 = 3a \cdot 3b \cdot 3c = 27abc = 27V_1$$

байна. Иймд эзлэхүүн нь 27 дахин ихсэнэ.

12.3.



Призмийн суурийн талын уртыг $2a$ гэвэл суурийн диагоналын уртын хагасын квадрат нь $a^2 + a^2 = 2a^2$ байна. Иймд $2a^2 + 2^2 = 3^2 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{2}$ байна. Призмийн эзлэхүүн $4a^2 \cdot 4 = 16a^2 = 16 \cdot \frac{5}{2} = 40$, бөмбөрцгийн эзлэхүүн $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$ байна. Иймд бидний олох харьцаа

$$V = \frac{40}{36\pi} = \frac{10}{9\pi}$$

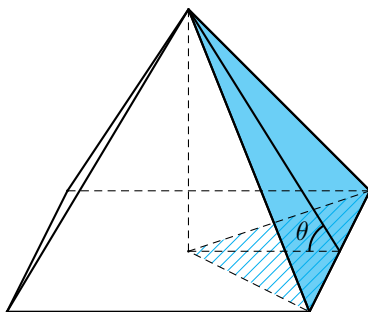
12.4. Суурийн тойргийн радиусыг r гэвэл урт нь $a = \sqrt{48\pi} = 2\pi r$ байна. Иймд $r = \frac{\sqrt{48\pi}}{2\pi}$ байна. Иймд суурийн талбай нь

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{48\pi}}{2\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{48\pi}{4\pi^2} = 12$$

12.5.

$$V_0 = \frac{4\pi R^3}{3} = 168 \Rightarrow V_y = 2\pi R^3 = \frac{168 \cdot 3}{2} = 252.$$

12.6.



Пирамидын нэг талсын талбайг S_1 гэвэл түүний суурь дээрх проекцийн талбай нь $S_1 \cos \theta$ байна (хажуу талсын суурь дээрх проекцийн өндөр нь апофемыг $\cos \theta$ -аар үржүүлэхэд гарна). Хажуу гадаргуугийн талбай $4S_1$, тэдгээрийн суурь дээрх проекцүүдийн нийлбэр буюу суурийн талбай $4S_1 \cos \theta$ тул

$$\cos \theta = \frac{4S_1 \cos \theta}{4S_1} = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

байна. Иймд $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

12.7. Багтсан конусын эзлэхүүн

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n} H,$$

багтаасан конусын эзлэхүүн

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{4} \operatorname{csc}^2 \frac{180^\circ}{n} H$$

тул

$$V_1 : V_2 = \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n} : \operatorname{csc}^2 \frac{180^\circ}{n} = 1 : 4$$

байна. $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ гэвэл

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} : \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \cos^2 \alpha = 1$$

болно. Эндээс $\cos \alpha > 0$ тул $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ буюу $\alpha = 60^\circ$ болов. Иймд

$$\frac{180^\circ}{n} = 60^\circ \Rightarrow n = 3$$

болов.

12.8. ABC гурвалжны төв нь H , MN хэрчмийн дундаж цэг F гэвэл бидний олох өнцөг нь $\angle DFH$ байна.

$$DM = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$MF = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}a$$

Тул DFM тэгш өнцөгт гурвалжнаас

$$DF = \sqrt{DM^2 - MF^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{11}a}{4}$$

$\angle HNF = \angle HCA = 30^\circ$ тул

$$HF = NF \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{12}$$

DHF тэгш өнцөгт гурвалжнаас

$$\cos \angle DFH = \frac{HF}{DF} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{12}}{\frac{\sqrt{11}a}{4}} = \frac{1}{\sqrt{33}}$$

тул

$$\sin \angle DFH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DFH} = \sqrt{\frac{32}{33}} = \frac{4\sqrt{66}}{33}$$

12.9. Конус өндөр нь Пифагорын теоремоор $h^2 = \ell^2 - r^2$ байна.

$$8^2 = 17^2 - r^2 \Rightarrow r = 15$$

Иймд $S = \pi \cdot 17 \cdot 15 = 255\pi$ болов.

12.10. $AC^2 = AB^2 + BC^2$ тул ABC нь тэгш өнцөгт гурвалжин байна. Иймд $R_{ABC} = \frac{10}{2} = 5$ байна. $R_{ABC}^2 + 12^2 = R^2$ байна.

$R^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ тул бөмбөрцгийн гадаргуугийн талбай нь $4 \cdot 169\pi = 676\pi$ байна.

12.11. Бөмбөрцгийн төв нь координатын эх ба радиус нь $OB = \sqrt{64} = 8$ байна. А цэгээс координатын эх хүртэлх зай:

$$OA = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100} = 10$$

$\angle ABO = 90^\circ$ байх тул Пифагорын теоремоор:

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow AB = 6$$

12.12. AB хэрчмийн дундаж C_1 цэгийн координат:

$$C_1 \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{6+4}{2} \right) = C_1(2, 3, 5)$$

CC_1 медианы урт:

$$CC_1 = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-1))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{81} = 9$$

12.13. $(x; y) = (3; -3)$ үед

$$3^2 + 2 \cdot 3 + (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 6 = 0$$

тул $(3; -3)$ цэг муруй дээр оршино.

12.14. $2x + 3y = 5$, $-3x + 2y = 5$ шулуунуудын хувьд $2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0$ тул перпендикуляр байна.

12.15.

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ 3x + 4y + z - 11 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

1-р тэгшитгэлээс 3-р тэгшитгэлийг хасвал

$$(2x - y + z - 5) - (x - y + z - 4) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

буюу $x = 1$ байна. Үүнийг 1 ба 2-р тэгшитгэлд орлуулбал $2 - y + z - 5 = 0$, $3 + 4y + z - 11 = 0$ болно. Эдгээрийн ялгавар нь

$$(2 - y + z - 5) - (3 + 4y + z - 11) = -5y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$$

болно. Иймд $2 - 1 + z - 5 = 0$ буюу $z = 4$ байна. Иймд огтлолцолын цэгийн координат нь $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ байна.

12.16.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot 1 = \lambda \\ |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{0^2 + \lambda^2 + 1^2} = \sqrt{\lambda^2 + 1} \end{aligned}$$

тул

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

болно. Тэгшитгэлийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлэн бодвол

$$\frac{1}{4} = \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 + 1)} \Leftrightarrow \lambda^2 = 1$$

Эндээс $\lambda > 0$ болохыг тооцвол $\lambda = 1$ болно.

12.17.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (2\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = (3; 4; 1) - (1; 3; 2) = (2; 1; -1) \\ \vec{b} &= (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = (1; 3; 2) - (2; 1; -1) = (-1; 2; 3) \end{aligned}$$

тул

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2; 1; -1) \cdot (-1; 2; 3) = \\ &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -3 \end{aligned}$$

12.18. Векторууд коллинеар бол $\frac{5}{x} = \frac{y}{2} = \frac{-6}{2}$ байна. Эндээс $x = 10$ байна.

12.19. $(1; 3) = \lambda(x; y) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \Rightarrow 3x - y = 0$ байна.

12.20. $A = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$, $B = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$. Суурийн радиус нь R байх h өндөртэй конусын эзлэхүүн $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ тул $C = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$. Иймд $C < A = B$ байна.

12.21.

1. SA ирмэгийн суурьтай үүсгэх өнцөг нь $\angle SAC = 60^\circ$, SC ирмэгийн суурьтай үүсгэх өнцөг нь $\angle SCA = 60^\circ$ тул $\triangle ASC$ нь 4 талтай зөв гурвалжин байна. $\triangle ASC$ -ийн SH өндөр нь пирамидын өндөр болох тул $h = SH = AS \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

2. Суурийн гипотенузын урт $AC = 4$. Катетууд нь $4 \cdot \sin 30^\circ = 2$, $4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ тул талбай нь

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

3. $V = \frac{1}{3}Sh$ тул

$$S = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 4.$$

4. $\triangle ASC$ -г багтаасан тойргийн төв O нь багтаасан бөмбөрцгийн төв ($OB = OA = OC = OS$) болох тул багтаасан бөмбөрцгийн радиус нь $\triangle ASC$ -г багтаасан тойргийн радиус буюу

$$\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

байна.

12.22. ADC гурвалжин ба SP шулууны хувьд Менелайн теорем бичвэл

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DN}{NC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$$

байна. Иймд $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$ буюу $\frac{CS}{SA} = \frac{3}{2}$. Эндээс $2SC = 3(SC - CA)$ буюу $SC = 3CA$ болж байна. Иймд $\overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{AC}$.

ABC гурвалжин ба SM шулууны хувьд Менелайн теорем бичвэл

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$$

болно. Иймд $\frac{1}{1} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{3}{2} = 1$ буюу $CQ : QB = 3 : 2$ байна.

12.23. $D(x; y; z)$ гэвэл $\overrightarrow{CD} = (x+2; y-4; z-1)$ ба

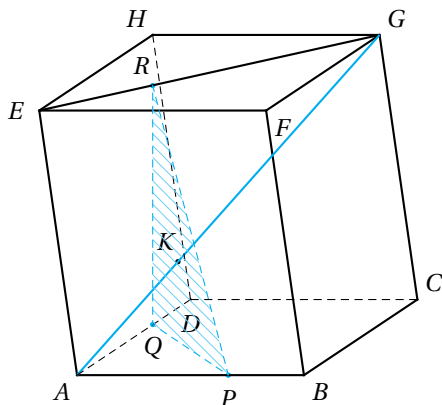
$$\overrightarrow{AB} = (1-2; 0-(-3); 8-5) = (-1; 3; 3)$$

тул

$$(x+2; y-4; z-1) = -3\overrightarrow{AB} = (3; -9; -9)$$

буюу $x+2=3$, $y-4=-9$, $z-1=-9$ болно. Иймд $x=1$, $y=-5$, $z=-8$ тул нийлбэр нь -12 байна.

12.24.



K цэг PQR гурвалжны хүндийн төв тул

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Тул K цэг AG -г 1 : 2 харьцаагаар хуваана.

12.25.

1. AB хэрчмийн дундаж цэгийн координат нь

$$M\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = M(-2, 3)$$

байх ба CM шулууны тэгшитгэл

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-(-2)}{3-(-2)} \Leftrightarrow -x+3 = y+2$$

тул

$$y = -x + 1$$

2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2; 5) - (-6; 1) = (8; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -2) - (-6; 1) = (9; -3)$ векторуудын хоорондох өнцгийн косинус нь

$$\cos \alpha = \frac{8 \cdot 9 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{9^2 + (-3)^2}} = \frac{60}{4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

тул $\alpha = 45^\circ$ болно.

3. AB хэрчмийн дундаж цэг нь $\frac{A+B}{2} = \frac{(-6, 1) + (2, 5)}{2} = (-2, 3)$,

$\overrightarrow{AB} = (2 - (-6), 5 - 1) = (8, 4)$ тул дундаж перпендикуляр шулууны тэгшитгэл нь

$$8(x - (-2)) + 4(y - 3) = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

$$AC \text{ хэрчмийн дундаж цэг нь } \frac{A+C}{2} = \frac{(-6, 1) + (3, -2)}{2} = (-1.5, -0.5),$$

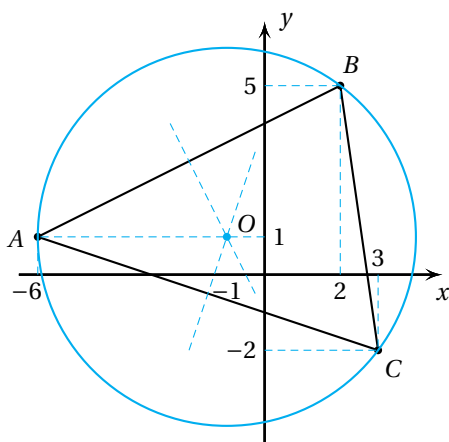
$\overrightarrow{AC} = (3 - (-6), -2 - 1) = (9, -3)$ тул дундаж перпендикуляр улууны тэгшитгэл нь

$$9(x - (-1.5)) - 3(y - (-0.5)) = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 4$$

болно. Иймд багтаасан тойргийн төв нь

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow -2x - 1 = 3x + 4 \Rightarrow x = -1, y = 1$$

координаттай байна. (Зургаа зөв зураад зургаасаа багтаасан тойргийн төвийг олбол илүү хурдан байх боломжтой.)



Багтаасан тойргийн радиус нь $R = OA = |(-1) - (-6)| = 5$ болно. Иймд тэгшитгэл нь

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

байна.

13. Геометр сэдвийн давтлага 2

13.1. Олох диагоналын уртыг d гэе. Параллелограммын чанар ёсоор

$$d^2 + 7^2 = 2 \cdot (3^2 + 5^2)$$

тул $d = \sqrt{68 - 49} = \sqrt{19}$ байна.

13.2. Катетуудыг a, b , гипотенузыг c гэвэл $a + b + c = 6$, $\frac{a}{b} = 2.4$, $a^2 + b^2 = c^2$ болно. Мөн

$$R + r = \frac{c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b}{2}$$

байна. $a = 2.4b$ тул $(2.4b)^2 + b^2 = (2.6b)^2 = c^2$ ба $b, c > 0$ тул $c = 2.6b$ байна. Иймд $2.4b + b + 2.6b = 6$ буюу $b = 1$, $a = 2.4$ тул

$$R + r = \frac{2.4 + 1}{2} = 1.7$$

13.3.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} \Rightarrow 4x + y = 0$$

13.4.

$$c^2 = 2(11^2 + 23^2) - 4 \cdot 10^2 = 900 \Rightarrow c = 30$$

13.5. Цилиндрийн байгуулагч болон төвийг суурийн тойргийн цэгтэй холбоход үүсэх хэрчим хоёрын хоорондох өнцгийг θ гэвэл суурийн радиус нь $r = R \sin \theta$, өндөр нь $h = 2R \cos \theta$ байна. Суурийн периметр нь $2\pi r = 2\pi R \sin \theta$ тул хажуу гадаргуугийн талбай нь

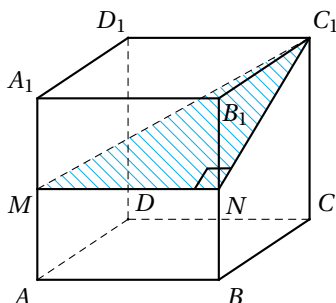
$$S = 4\pi R^2 \sin \theta \cos \theta = 2\pi R^2 \sin 2\theta$$

байна. Эндээс $\theta = 45^\circ$ ($\sin 2\theta = 1$) үед хажуу гадаргуугийн талбай хамгийн их байх нь ээ. Энэ үед эзлэхүүн нь

$$V = S \cdot h = \pi (R \sin 45^\circ)^2 \cdot 2R \cos 45^\circ = \frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$$

байна.

13.6.



AA_1 хэрчмийн дундаж цэг M , BB_1 хэрчмийн дундаж цэг N бол MN нь AB -тэй параллель буюу BB_1C_1C хавтгайд перпендикуляр байна. Иймд $\angle MNC = 90^\circ$. Кубын талын уртыг $2x$ гэвэл

$$NC^2 = x^2 + (2x)^2$$

тул

$$MC_1^2 = MN^2 + NC^2 = (2x)^2 + 5x^2 = 9x^2 = 36$$

болно. Иймд талын урт нь $x = 2 \Rightarrow AB = 2 \cdot 2 = 4$ ба эзлэхүүн нь $V = 4^3 = 64$ байна.

13.7.

$$BH = \frac{BH_1}{\sin \gamma} = \frac{AB \cos \beta}{\sin \gamma},$$

$$HH_2 = \frac{AH_2}{\tan \gamma} = \frac{AB \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma}$$

тул

$$\begin{aligned}
 BH : HH_2 &= \frac{AB \cos \beta}{\sin \gamma} : \frac{AB \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma} \\
 &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} = \frac{\cos 40^\circ}{\cos 60^\circ \cos 80^\circ} \\
 &= \frac{2 \cos 40^\circ}{\cos 80^\circ} \quad \leftarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

13.8.

$$3^2 - 2 \cdot 3 + (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 6 = 0$$

тул $(3; -3)$ цэг $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$ тэгшитгэлтэй муруй дээр оршино. Бусад цэгүүдийн хувьд тэгшитгэлийн шийд биш болохыг харуулж болно. Жишээ нь $(0, -1)$ цэгийн хувьд:

$$0^2 - 2 \cdot 0 + (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 6 = 1 \neq 0$$

13.9.

$$\begin{aligned}
 (\vec{b} + \vec{a}) - (\vec{b} - \vec{a}) &= 2\vec{a} \Rightarrow \\
 2\vec{a} &= (1; 4; -3) - (3; 2; 5) = (-2; 2; -8) \Rightarrow \\
 \vec{a} &= (-1; 1; -4)
 \end{aligned}$$

ба

$$\begin{aligned}
 (\vec{b} + \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{a}) &= 2\vec{b} \Rightarrow \\
 2\vec{b} &= (1; 4; -3) + (3; 2; 5) = (4; 6; 2) \Rightarrow \\
 \vec{b} &= (2; 3; 1)
 \end{aligned}$$

байна. Иймд

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 = -3$$

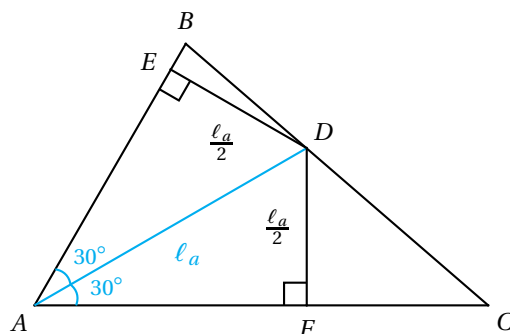
$$13.10. S_{\triangle ADB} = \frac{4 \cdot \frac{\ell_a}{2}}{2} = \ell_a, S_{\triangle ADC} = \frac{6 \cdot \frac{\ell_a}{2}}{2} = 1.5\ell_a \text{ ба}$$

$$S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC} = S$$

тул

$$\ell_a + 1.5\ell_a = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ$$

болно. Иймд $\ell_a = \frac{12\sqrt{3}}{5}$ байна.



Жич: Өнцгийн биссектрис нь тухайн өнцгийг үүсгэж буй цацрагуудаас ижил зайд алслагдсан цэгүүдийн олонлог байдаг.

13.11. a талтай зөв гурвалжны медианы урт нь $a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ байна. Харин $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

талтай зөв гурвалжны медианы урт нь $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{4}a$ байна. Иймд зөвхөн C хариулт л зөв байх боломжтой.

13.12. Кубийн төвийг оройнуудтай холбовол талс бүр дээр суурьтай 6 ижил пирамид үүснэ. Эдгээрийн нэгдэл нь куб болох тул нэг бүрийнх нь эзлэхүүн $\frac{1}{6}V$ байна.

13.13. Байгуулагчийг ℓ гэвэл өндөр нь $h = \ell \cos 60^\circ = \frac{\ell}{2}$ байна. $\ell + \frac{\ell}{2} = 15 \Rightarrow \ell = 10$. Суурийн радиус нь

$$R = \sqrt{\ell^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$$

Суурийн талбай нь $S = \pi R^2 = 75\pi$, эзлэхүүн нь

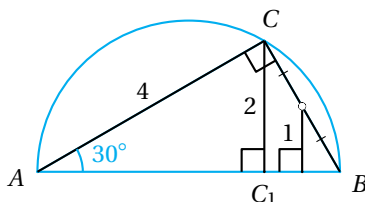
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 75\pi \cdot 5 = 125\pi$$

13.14. $(5k)^2 = (4k)^2 + (3k)^2$ тул гурвалжин маань тэгш өнцөгт гурвалжин байна. Иймд өндрүүд нь 15, 20 урттай катетуут болох тул талбай нь

$$S = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

Ерөнхий тохиолдолд $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$ -ээс өнцгийн косинусыг олох, эсвэл Героны томьёонд орлуулж бодно.

13.15.



BC талын дундажаас AB -д татсан перпендикулярын урт 1 ба энэ нь $\triangle BCC_1$ -ийн дундаж шугам тул CC_1 өндрийн урт 2 байна. Түүнчлэн $\angle AC_1C = 90^\circ$ ба $\angle CAC_1 = 30^\circ$ тул

$$AC = \frac{CC_1}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

байна.

13.16. Жижиг секторын талбай нь $\frac{1}{6}\pi \cdot 7^2 = \frac{49}{6}\pi$. Том секторын радиус нь $7 + 2 = 9$ тул талбай нь $\frac{1}{6}\pi \cdot 9^2 = \frac{81}{6}\pi$ байна. Иймд хар хэсгийн талбай нь $\frac{81 - 49}{6}\pi = \frac{16}{3}\pi$.

13.17. $BC = 4 + 3 = 7$ тул $AB + AC = 28 - 7 = 21$ байна. Иймд $AB = 21 - AC$ ба биссектрисийн чанар ёсоор

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{21 - AC}{4} = \frac{AC}{3} \Rightarrow AC = 9$$

13.18. $A(1; -3)$, $B(4; 1)$, $C(7; y)$, $D(x; 5)$ гэе.

$$\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+7}{2} = \frac{4+x}{2} \\ \frac{-3+y}{2} = \frac{1+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$$

Эндээс $x + y = 13$.

13.19.

$$\begin{cases} \pi r^2 h = 63\pi \\ 2rh = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 h = 63 \\ rh = 9 \end{cases}$$

Эндээс

$$r = \frac{\pi r^2 h}{rh} = \frac{63}{9} = 7$$

байна.

13.20. Суурь нь зөв гурвалжин ба түүнийг багтаасан тойрог нь бөмбөлөгийн их тойрог тул пирамидын суурийн талбай

$$S = 2R^2$$

ба өндөр $h = R$ байна. Эндээс

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \cdot R = 18 \Rightarrow R = 3$$

13.21.

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 4x + 6y &= 3 \\
 x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 &= 3 + 2^2 + 3^2 \\
 (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 16
 \end{aligned}$$

байна. Иймд

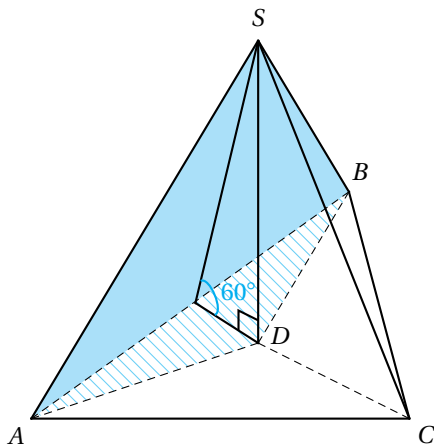
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$$

болох тул $A(2; -3)$, $r = 4$ байна.

13.22. Суурийн периметрийн хагас нь $p = \frac{26 + 28 + 30}{2} = 42$ тул Героны томьёо ёсоор талбай нь

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{42(42 - 26)(42 - 28)(42 - 30)} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 336$$

байна.



$\triangle SAB$ гурвалжны SE өндрийн проекц нь $\triangle DAB$ гурвалжны ED өндөр тул

$$\frac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle SAB}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot DE}{\frac{1}{2} AB \cdot SE} = \frac{DE}{SE} = \cos 60^\circ$$

буюу $S_{\triangle SAB} = \frac{S_{\triangle DAB}}{\cos 60^\circ}$ байна. Үүнтэй адилаар $S_{\triangle SAC} = \frac{S_{\triangle DAC}}{\cos 60^\circ}$, $S_{\triangle SBC} = \frac{S_{\triangle DBC}}{\cos 60^\circ}$ тул

$$S = \frac{S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DAC} + S_{\triangle DBC}}{\cos 60^\circ} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos 60^\circ} = 2 \cdot 336$$

ба бүтэн гадаргуун талбай нь

$$S = 3 \cdot 336 = 1008 \text{ кв.н}$$

13.23.

$$\vec{a} = (2\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = (3 - 1, 4 - 3, 1 - 2) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = (1 - 2, 3 - 1, 2 - (-1)) = (-1, 2, 3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ тул}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}{6 \cdot 14} = -\frac{\sqrt{21}}{14}$$

13.24.

1. Тойрогт багтсан тул $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$. Иймд $\cos \angle BCD = -\frac{1}{8}$ ба

$$\sin \angle BCD = \sqrt{1 - (-1/8)^2} = \sqrt{63/64} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Синусийн теоремоор $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = 2R$ буюу

$$BD = 2 \cdot \frac{8\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{2 \cdot 3\sqrt{7}}{8} = 6.$$

Косинусын теоремоор

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cos \angle BCD$$

байна. Иймд

$$6^2 = 4^2 + CD^2 - 2 \cdot 4 \cdot CD \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$$

буюу $CD^2 + CD - 20 = 0$ тэгшитгэлээс $CD = 4$ болно ($CD = -5$ шийд нь хэрчмийн урт болж чадахгүй).

2. $x^2 + y^2 + 2xy = 81$ ба $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{8} = 36$. Тэгшитгэлүүдийг хасвал $\frac{9}{4}xy = 45$ буюу $xy = 20$. Талбай нь

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \\ &= \frac{1}{2}xy \sin \angle BAD + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin \angle BCD \\ &= (10 + 8) \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{27\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

13.25. ABD ба BDC гурвалжнуудад косинусын теорем бичвэл

$$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos \angle A = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos \angle C.$$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \text{ тул}$$

$$30 \cos \angle C + 98 \cos \angle C = 98 - 34 \Rightarrow \cos \angle C = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle C = 60^\circ, BD = 7$$

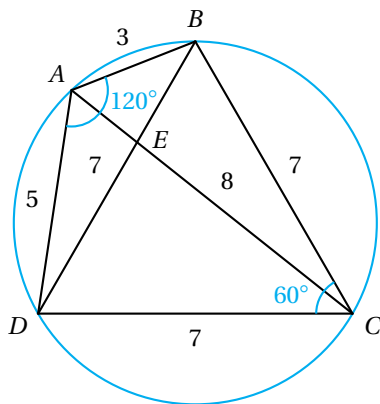
болно. Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн чанараар (Птолемейн теорем)

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

буюу

$$AC \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7.$$

Иймд $AC = 8$ болно.



$ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн талбай

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = 16\sqrt{3}$$

байна. O тойргийн радиус $\frac{BD}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ байна. ABD гурвалжинд багтсан тойргийн радиус

$$\frac{2S_{ABD}}{AB + BD + DA} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin 120^\circ}{3 + 7 + 5} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

байна. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтолцолын цэг E бол

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AEB \text{ буюу } 16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin \angle AEB. \text{ Эндээс } \sin \angle AEB = \frac{4\sqrt{3}}{7} \text{ байна.}$$

14. Комбинаторик 2

14.1.

$$A_{n+2}^4 = \frac{(n+2)!}{(n+2-4)!} = (n+2)(n+1)n(n-1)$$

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$C_n^{n-2} = \frac{n!}{\{n - (n-2)\}! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

тул

$$(n+2)(n+1)n(n-1) = 6 \cdot 24 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

болно. C_n^{n-2} тул $n-2 \geq 0$ буюу $n \geq 2$ тул

$$(n+2)(n+1) = 72 \Rightarrow n^2 + 3n - 70 = 0 \Rightarrow n_1 = 7, n_2 = -10$$

байна. Иймд $n = 7$.

14.2.

$$8!C_{10}^2 = 8! \cdot \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} = \frac{10!}{(10-8)!} = A_{10}^8$$

14.3. $n = 2010$ тул коэффициент нь

$$C_{2015}^{2010} = \frac{2015!}{(2015-2010)! \cdot 2010!} = \frac{2015!}{5! \cdot 2010!}$$

14.4. $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{x}}\right)^8$ биномын задаргаа 9 гишүүнтэй тул дундаж гишүүн нь 5-р гишүүн байна. Иймд

$$T_{4+1} = C_8^4 (\sqrt{x})^{8-4} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{x}}\right)^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot x^2 \cdot \frac{4}{x} = 280x$$

байна.

14.5.

$$\begin{aligned} 2^{100} &= (3 + (-1))^{100} = C_{100}^{100} \cdot 3^{100} \cdot (-1)^0 + C_{100}^{99} \cdot 3^{99} \cdot (-1)^1 + \dots + C_{100}^0 \cdot 3^0 \cdot (-1)^{100} \\ &= 3^{100} \cdot C_{100}^{100} - 3^{99} \cdot C_{100}^{99} + 3^{98} \cdot C_{100}^{98} - \dots - 3^1 \cdot C_{100}^1 + 1 \end{aligned}$$

14.6. А сагсан бөмбөг тоглодог хүүхдүүд, В даам тоглодог хүүхдүүд гэвэл сагсан бөмбөг ба даам тоглодог хүүхдүүд нь $A \cap B$ байна.

$$|A \cup B| = 20 - 2 = 18$$

Нөгөө талаас $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$ тул

$$|A \cap B| = 10 + 12 - 18 = 4$$

байна.

14.7. Бидний олох тоо $a + b + c + d = 20$ тэгшитгэлийн сөрөг биш бүхэл тоон шийдийн тоотой тэнцүү тул

$$C_{(4)}^{20} = \overline{C_4^{20}} = C_{20+4-1}^{20} = C_{23}^{20} = \frac{23!}{3! \cdot 20!} = 1771$$

14.8. $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ байна. Иймд хуваагчдын тоо нь $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$.

14.9. Бөхчүүдийн барилдааны тооны нийлбэр $40 \cdot 15 = 600$ болно. Нөгөө талаас барилдаан бүр 2 удаа тоологдох тул нийт $\frac{600}{2} = 300$ барилдаан болно.

14.10.

$$(a, b, c, d) \in S_{AB} \times S_{BC} \times S_{BC} \times S_{AB}$$

байх дөрөвтүүдийн тоо нь декарт үржвэрийн чадал ба

$$|(a, b, c, d) \in S_{AB} \times S_{BC} \times S_{BC} \times S_{AB}| = |S_{AB}| \cdot |S_{BC}| \cdot |S_{BC}| \cdot |S_{AB}|$$

тул нийт замын тоо нь $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 576$ байна.

14.11. Бид $\overline{abcd0}, \overline{abc0d}, \overline{ab0cd}, \overline{a0bcd}$ хэлбэрийн ялгаатай цифрүүд бүхий 5 оронтой тоог тоолно. Хувилбар тус бүрд a, b, c, d цифрүүдийг $A_9^4 = 4! \cdot C_9^4$ янзаар сонгох боломжтой тул нийт $4 \cdot 4! C_9^4$ ширхэг тоо байна.

14.12. ℓ_1 шулуун дээрээс 3 цэг сонгох боломжийн тоо C_4^3 , ℓ_2 шулуун дээрээс 3 цэг сонгох боломжийн тоо C_3^3 ба нийт 7 цэг байгаа тул

$$C_7^3 - C_4^3 - C_3^3 = 30$$

гурвалжин үүснэ.

14.13. 12 хүн хөзрөөс 3-ийг нь сонгох бүрт гурвуулаа хүн хөзөр байх нэг эгэл үзэгдэл гарах тул нийт C_{12}^3 эгэл үзэгдэл байна.

14.14. Бага ангийн 2 сурагчийг $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, дунд ангийн 2 сурагчийг $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ янзаар сонгоно. Иймд нийт боломжийн тоо $28 \cdot 10 = 280$ байна.

14.15. Нийт жагсаалын тоо $20!$ байх ба нийт жагсаалын яг хагаст нь Болд Амарын урд явах учир $\frac{20!}{2}$.

14.16. 24 болон өөр 3 цифрийг нийт $4!$ янзаар сэлгэх тул 24 гэж дараалж орсон $4 \cdot 4!$ ширхэг тоо болох ба 42 гэж дараалж орсон тоо мөн $4 \cdot 4!$ ширхэг байна. Иймд нийт $8 \cdot 4!$ ширхэг тоо үүсэх боломжтой.

14.17. 1 ба 3-ийн цифрүүд 13 гэж дараалж орсон нийт $8!$ тоо, 31 гэж дараалж орсон нь мөн адил $8!$ байна. Нийт тоонуудын тоо нь $9!$ тул бидний олох тоо

$$9! - 2 \cdot 8! = (9 - 2) \cdot 8! = 7 \cdot 8!$$

байна.

14.18. x_i нь i -р вагонд суусан сурагчдын тоо гэвэл

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 9$$

байна. Нөгөө талаас $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 9$ тэгшитгэлийн $(x_1, x_2, \dots, x_8)$, $x_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ шийд бүрт i -р вагонд x_i сурагч суусан байх боломж харгалзах тул бидний олох тоо нь дээрх тэгшитгэлийн шийдийн тоо байна. Энэ нь 8-аас 9-өөр авсан давталттай хэсэглэлийн тоо тул

$$C_{(8)}^9 = C_{8+9-1}^9 = C_{16}^9 = \frac{16!}{7! \cdot 9!}$$

байна.

14.19. Дурын 4 цифрийг цор ганц аргаар үл буурах эрэмбээр байрлуулж болох ба эхний цифр нь 0-ээс ялгаатай тул 1-9 цифрүүдээс 4-ийг нь давталттайгаар сонгох тоо буюу

$$C_{(9)}^4 = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

байна.

14.20. Зуутын оронд 1 цифр бичигдсэн тоонууд нь 100, 101 гэх мэтчилэн 199 нийт 100 ширхэг тоо байна.

Аравтын оронд нь 1 цифр бичигдсэн 500-аас бага тоонууд нь 1а, 11а, 21а, 31а, 41а хэлбэртэй байх бөгөөд а-ийн оронд 0-9 цифрүүд байж болох нийт $5 \cdot 10 = 50$ ширхэг тоо байна.

Нэгжийн оронд нь 1 цифр бичигдсэн 500-аас бага тоонуудыг дээрхтэй төстэй аргаар тоолоод 50 ширхэг гэдгийг нь гаргах төвөгтэй биш. Иймд нийт $100 + 50 + 50 = 200$ ширхэг 1-ийн цифр ашиглана.

14.21. Эхлээд сүүлийн 2 оронтой тоо нь ямар тоонууд байж болохыг тооцъё. Эдгээр нь 12, 24, 32, 44, 52 байж болно. Эхний хоёр оронг тус бүр 5, 5 янзаар сонгож болох тул нийт $5 \cdot 5 = 25$ аргаар эхний 2 цифрийг сонгоно.

4 оронтой тоо бүрийг эхний 2 цифр ба сүүлийн хоёр цифрийн сонголтоор нэг утгатай бичиж болох тул зөвхөн 1, 2, 3, 4, 5 цифрүүдээр бичиж болох 4-д хуваагддаг 4 оронтой тоо нийт $25 \cdot 5 = 125$ ширхэг байна.

14.22. 1-р бодолт.

$$P(2, 1, 1, 1) = \frac{(2 + 1 + 1 + 1)!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

2-р бодолт. Таван байранд 5 үсэг байрлуулах бодлого гэж үзээд бодъё. Б үсгийг 5 янзаар байрлуулж болно. Хоёр О үсгийг үлдэх 4 байранд $C_4^2 = 6$ янзаар байрлуулж болно. Т үсгийг үлдэх 2 байрын аль нэгэнд буюу 2 янзаар, Г үсгийг сул үлдэх 1 байранд буюу 1 янзаар байрлуулна. Иймд $5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 60$ ялгаатай үг зохиож болно.

14.23.

$$P(3, 2, 1, 1, 1) = \frac{(3 + 2 + 1 + 1 + 1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3360$$

14.24. Ангийн 10 хүү, 10 охиноос 4 хүнтэй баг бүрдүүлэв.

$$1. \text{ Нийт боломжийн тоо нь } C_{20}^4 = \frac{20!}{16! \cdot 4!} = 4845.$$

$$2. \text{ Баг дан эрэгтэй сурагчаас бүрдсэн байх боломжийн тоо } C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210.$$

$$3. \text{ Эрэгтэй, эмэгтэй сурагчид тус бүр 2 байх боломжийн тоо нь } C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 = 45^2 \text{ тул багийн эрэгтэй ба эмэгтэй сурагчдын тоо тэнцүү байх магадлал}$$

$$\frac{45^2}{17 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \cancel{15} \cdot 45}{17 \cdot \cancel{15} \cdot 19} = \frac{135}{323}$$

байна.

14.25.

$$1. \text{ Аливаа ялгаатай 3 элемент нь гурвалжны тэнцэтгэл бишийг хангах тул } C_5^3 = 10 \text{ ширхэг элдэв талт гурвалжин байна.}$$

$$2. \text{ 9, 9, 18-ээс ялгаатай } a, a, b \text{ хэлбэрийн 3 тоо сонгоход гурвалжин үүсэх тул } A_5^2 - 1 = 5 \cdot 4 - 1 = 19 \text{ ширхэг адил хажуут гурвалжин байна.}$$

$$3. \text{ Зөв гурвалжны тоо 5 тул нийт } 10 + 19 + 5 = 34 \text{ гурвалжин байна. Иймд сонгосон гурвалжин зөв гурвалжин байх магадлал } \frac{5}{34} \text{ байна.}$$

15. Магадлал, Статистик 2

15.1. Нар баруунаас гарах боломжгүй юм. Бусад үзэгдлүүдийн хувьд тодорхой магадлалтайгаар явагдах боломжтой үзэгдлүүд юм.

15.2. Шагай бүр 4 янзаар тусах тул нийт 4^5 янзаар, зоос бүр 2 янзаар тусах тул 2^3 янзаар тусах боломжтой. Иймд нийт $4^5 \cdot 2^3$ янзаар тусна.

15.3. Харилцан нийцгүй тул нийлбэр үзэгдлийн магадлал нь үзэгдэл тус бүрийн магадлалуудын нийлбэр буюу

$$0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.9$$

байна.

15.4. 1-р хүн байг онохгүй байх магадлал $1 - 0.5 = 0.5$, 2-р хүн байг онохгүй байх магадлал $1 - 0.6 = 0.4$ ба бие биеэсээ хамаарахгүй тул хоёулаа оноогүй байх магадлал нь $0.5 \cdot 0.4 = 0.2$ байна.

15.5. $\{3; 1\}, \{4; 2\}, \dots, \{10; 8\}$ гэсэн нийт 8 хос байгаа. Нийт боломжит хосын тоо $C_{10}^2 = 45$ тул магадлал нь $\frac{8}{45}$ байна.

15.6. 2 гологдол бүтээгдэхүүнийг C_4^2 , 2 стандарт бүтээгдэхүүнийг C_{14}^2 янзаар сонгох тул 2 нь гологдол байх 4 бүтээгдэхүүнийг $C_4^2 C_{14}^2$ янзаар сонгоно. 4 бүтээгдэхүүнийг нийт C_{18}^4 янзаар сонгож болно. Бүх боломж ижил боломжтой гэж үзээд магадлал тооцвол $\frac{C_4^2 C_{14}^2}{C_{18}^4}$ байна.

15.7. Хар ба цагаан бөмбөг гарч ирэх боломжийн тоо $2 \cdot 3 = 6$. Нийт

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

бөмбөгнөөс хоёр бөмбөг авах боломжийн тоо $C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$. Иймд хар ба цагаан өнгөтэй 2 бөмбөг гарч ирэх магадлал $\frac{6}{91}$ байна.

15.8. Нийт хуваалтын тоо нь $\frac{C_{30}^{15}}{2}$. Эдгээрээс зөвхөн нэгд нь дан эрэгтэй сурагчтай хэсэг бий. Иймд нэг хэсэг нь дан эрэгтэй хүүхдээс бүрдсэн байх магадлал

$$\frac{1}{\frac{C_{30}^{15}}{2}} = \frac{2}{C_{30}^{15}}$$

байна.

15.9. $\frac{6 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{1}{4}$.

15.10. Бүх боломжийг жагсааж бичвэл хххх, хххо, ххох, хоxx, оххх, ххоо, хохо, хоох, оххо, охox, оохх, хооо, охоо, оохо, ооох, оооо байна. 2 хүү, 2 охинтой 6 боломж байгаа тул магадлал нь $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ байна.

Жич: Туршилтаар p магадлалтай илэрдэг үзэгдэл n удаагийн туршилтаар яг k удаа илрэх магадлал $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ байдаг. Үүнийг *Бернуллийн томьёо* гэдэг.

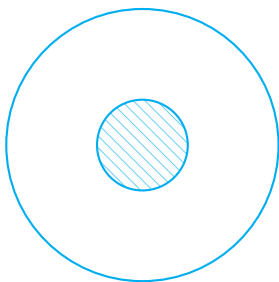
Манай бодлогын хувьд $p = \frac{1}{2}$ тул

$$C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

гэж бодож болно.

15.11. Ядаж 2 талс нь будагтай кубийн тоо $8 + 12 \cdot 8 = 104$ тул магадлал нь $\frac{104}{1000} = \frac{13}{125}$ байна.

15.12.



Жижиг дугуйн талбай $S_1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{9}$, том дугуйн талбай $S = \pi \cdot 1^2 = \pi$ байна. Том дугуйн бүх цэг ижил боломжтойгоор авагдана гэж үзээд геометр магадлал ашиглавал

$$P = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{\pi}{9}}{\pi} = \frac{1}{9}$$

15.13. Бодлогын нөхцөл ёсоор $P(G|A) = 0.2$, $P(G|B) = 0.6$, $P(G|C) = 1$ байна. Хэрэв X , Y , Z харгалзан 1, 2, 3-р сумаар оносон байх үзэгдэл бол

$$A = X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z$$

$$B = XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + \bar{X}YZ$$

$$C = XYZ$$

гэсэн харилцан нийцгүй үзэгдүүдийн нийлбэрт задарна. Иймд

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X\bar{Y}\bar{Z}) + P(\bar{X}Y\bar{Z}) + P(\bar{X}\bar{Y}Z) \\ &= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(XY\bar{Z}) + P(X\bar{Y}Z) + P(\bar{X}YZ) \\ &= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.41 \end{aligned}$$

$$P(C) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.14$$

Иймд

$$P(G) = 0.2 \cdot 0.36 + 0.6 \cdot 0.41 + 1 \cdot 0.14 = 0.45$$

15.14. $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(X|A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$, $P(X|B) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}$ тул

$$\begin{aligned} P(X) &= P(XA) + P(XB) \\ &= P(X|A) \cdot P(A) + P(X|B) \cdot P(B) \\ &= \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{22}{105} \end{aligned}$$

15.15. A, B, C, D, F -ээр сурагч тухайн дүнтэй суралцдаг байх үзэгдлийг, S -ээр спортоор хичээллэдэг байх үзэгдлийг тэмдэглэвэл Байесийн томьёо ёсоор:

$$\begin{aligned} P(B|S) &= \frac{P(B) \cdot P(S|B)}{P(A) \cdot P(S|A) + P(B) \cdot P(S|B) + \dots + P(F) \cdot P(S|F)} \\ &= \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{10}{100} \cdot \frac{1}{10} + \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{8} + \frac{30}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{30}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{20}{8 + 20 + 60 + 120 + 40} = \frac{20}{248} = \frac{5}{62} \end{aligned}$$

15.16.

$A = \{\text{таамгаар сонгон авсан эдлэл гологдол байх}\}$

$B_i = \{\text{энэ эдлэлийг } k\text{-р машин үйлдвэрлэсэн байх}\}$

үзэгдлүүд бол B_1, B_2, B_3 үзэгдлүүд нь хос хосоороо нийцгүй ба нийлээд A үзэгдлийг агуулна. Иймээс бүтэн магадлалын томьёо ашиглаж бодъё. Бодлогын нөхцөл ёсоор

$$P(B_1) = 0.30, P(B_2) = 0.25, P(B_3) = 0.45$$

ба

$$P(A|B_1) = 0.02, P(A|B_2) = 0.01, P(A|B_3) = 0.03$$

тул

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) \\ &= 0.30 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.45 \cdot 0.03 = 0.022 \end{aligned}$$

15.17.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

15.18. $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1 = 1 + 2, 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = \dots = 6 + 1, 8 = 2 + 6 = 3 + 5 = \dots = 6 + 2$ байна. Өөрөөр хэлбэл 2 нь 1 боломжтой, 3 нь 2 боломжтой, 7 нь 6 боломжтой, 8 нь 5 боломжтой байна. Иймд $n = 7$ байх магадлал хамгийн өндөр байна.

15.19.

$$E(X) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9$$

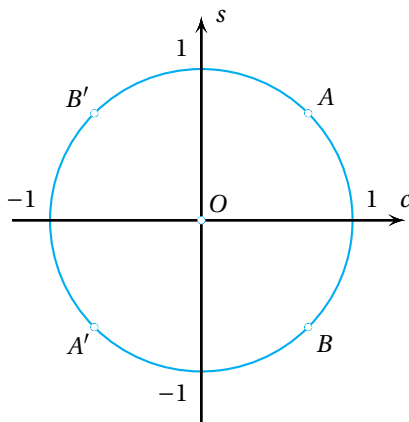
тул $(X - E(X))^2$ санамсаргүй хувьсагчийн тархалтын хууль нь

$(X - E(X))^2$	$(0 - 0.9)^2$	$(1 - 0.9)^2$	$(2 - 0.9)^2$	Σ
P	0.3	0.5	0.2	1

байна. Иймд дисперс нь

$$\text{Var}(X) = (-0.9)^2 \cdot 0.3 + 0.1^2 \cdot 0.5 + 1.1^2 \cdot 0.2 = 0.49$$

15.20. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); B'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ гэе.



С цэг AB' богино нум дээр байх үед A өнцөг мохоо, $A'B$ богино нум дээр байх үед B өнцөг мохоо, AB богино нум дээр байх үед C өнцөг мохоо байна. Харин $A'B'$ богино нум дээр байх үед бүх өнцөг нь хурц байна. Иймд ABC гурвалжин хурц өнцөгт гурвалжин байх магадлал нь

$$\frac{\overset{\sim}{A'B'}}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

байна.

15.21. Гурван дугуй дүрсийг A_{12}^3 янзаар, гурван дөрвөлжин дүрсийг A_{12}^3 янзаар тус бүр будаж болох тул ялгаатай дүрслэлийн тоо $A_{12}^3 \cdot A_{12}^3 = (A_{12}^3)^2$ байна.

15.22.

1. Ядаж нэг удаа морь буух үзэгдэл нь нэг ч удаа морь буухгүй байх үзэгдлийн эсрэг үзэгдэл юм. Бернулийн томьёо ёсоор нэг ч удаа морь буухгүй байх үзэгдлийн магадлал нь

$$C_3^0 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{3-0} = \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

тул үүний эсрэг үзэгдлийн магадлал

$$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

байна.

2. Бернулийн томьёо ёсоор яг нэг удаа морь буух магадлал

$$C_3^1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{3-1} = 0.243$$

3. Бернуллийн томъёо ёсоор яг хоёр удаа морь буух магадлал

$$C_3^2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{3-2} = 0.027$$

15.23. Нийт хоёр оронтой тоонуудын тоо нь 90 байна.

1. 4 цифр агуулсан 2 оронтой тоонууд нь 14, 24, 34, 40, 41, ..., 49, 54, 64, 74, 84, 94 буюу нийт 18 ширхэг байх тул хоёр оронтой тоо 4 цифр агуулах магадлал $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.
2. 4, 5 цифрүүд ороогүй нийт $7 \cdot 8 = 56$ тоо байна. (Аравтын орны цифр нь 0, 4, 5-аас бусад цифр, нэгжийн орны цифр нь 4, 5-аас ялгаатай). 4 ба 5 цифрүүдийн дор хаяж нэгийг нь агуулсан байх $90 - 56 = 34$ тоо байх тул магадлал нь $\frac{34}{90} = \frac{17}{45}$
3. Гуравт хуваагддаг нийт 30 ширхэг тоо байгаа. Магадлал нь $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$
4. 4 цифр агуулсан 3-д хуваагддаг тоонууд нь 24, 42, 45, 48, 54, 84 тул магадлал нь $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

15.24. $a + b = 6$ байх боломжууд нь (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1); $a + b = 7$ байх боломжууд нь (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1); $a + b = 9$ байх боломжууд нь (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) тул $\boxed{a} = 5$, $\boxed{b} = 6$, $\boxed{c} = 4$ байна.

I. Нийт (a, b) хосын тоо 36 ба үүнээс $a + b = 7$ байх нь 6 тул $P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

II. $3 \leq x \leq 7$ байх нийт $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ боломж байгаа тул $P(3 \leq x \leq 7) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

III. $x \leq 6$ байх нийт $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ боломж байгаа тул магадлал нь $P(x \leq 6) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ байна.

15.25. Пифагорын теоремоор $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ байна. Иймд конусын эзлэхүүн

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 12\pi = 100\pi$$

байна. Конусын тэнхлэг огтлол нь 13, 13, 10 талбай адил хажуут гурвалжин тул $p = \frac{13 + 13 + 10}{2} = 18$, $S = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$ байна. Иймд $r = \frac{S}{p} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$ ба багтсан бөмбөлгийн эзлэхүүн

$$V' = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi = \frac{4000}{81} \pi$$

тул санамсаргүйгээр сонгосон цэг бөмбөлөг дотор байх магадлал

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{4000}{81} \pi}{100\pi} = \frac{40}{81}$$

байна.

16. Магадлал, статистик давтлага 2

16.1. Гурван тооны нийлбэр нь 17 байх 3 боломж бий:

$$5 + 6 + 6 = 6 + 5 + 6 = 6 + 6 + 5 = 17.$$

Нийт боломжийн тоо $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$. Бүгдээрээ ижил магадлалтай гэж үзэж болох тул бидний олох магадлал $\frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$ байна.

16.2. Хоёр тооны нийлбэр тэгш байхын тулд хоёулаа тэгш, эсвэл хоёулаа сондгой байна. Иймд сонгосон хоёр тоо тэгш байх боломжийн тоо

$$C_{25}^2 + C_{25}^2 = 2C_{25}^2 = A_{25}^2$$

ба нийт боломжийн тоо C_{50}^2 тул сонгосон хоёр тооны нийлбэр тэгш байх магадлал $\frac{A_{25}^2}{C_{50}^2}$ байна.

16.3. Ану, Баярыг нэг хүн гэж үзвэл Ану, Баяр гэж дараалж жагссан нийт $4!$ боломж бий. Үүнтэй адил Баяр, Ану гэж дараалж жагссан $4!$ боломж бий. Иймд Ану, Баяр хоёр зэрэгцэж зогссон $2 \cdot 4!$ боломж байна. Нийт $5!$ янзаар жагсах тул магадлал нь $\frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$ байна.

16.4.

$$7!C_{10}^3 = 7! \cdot \frac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} = \frac{10!}{(10-7)!} = A_{10}^7$$

16.5. 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 гэсэн 18 тоонд 1-ийн цифр оролцоно. Нийт $99 - 9 = 90$ ширхэг 2 оронтой тоо байх тул санамсаргүйгээр (бүх тоо ижил магадлалтай бичигдсэн үед) бичсэн 2 оронтой тоонд 1-ийн цифр оролцсон байх магадлал нь $\frac{18}{90} = 0.2$ байна.

2 оронтой тоо тохиолдолд 1-ийн цифр орсон тоонуудыг олоход тоочих аргыг хэрэглэхэд ямар нэг асуудал байхгүй байна. 3, 4 оронтой тоо үед яаж олох вэ? Үүний тулд нийт тоонуудын тооноос 1-ийн цифр ороогүйг нь хасаж олдог. Жишээ нь нийт гурван оронтоо тооны тоо $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ (эхний цифр нь 0-ээс ялгаатай тул 9 боломжтой, бусад нь 10 боломжтой) бол 1-ийн цифр ороогүй гурван оронтой тооны тоо $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ (эхний цифр нь 0 ба 1-ээс ялгаатай тул 9 боломжтой, бусад нь 1-ээс ялгаатай тул 9 боломжтой) байна. Иймд 1-ийн цифр орсон нь $900 - 648 = 252$ байна.

16.6. Ерөнхий гишүүн нь $T_{k+1} = C_8^k (3x)^k (-y)^{8-k}$ байна. Бидний олох гишүүд нь $k = 3$, $k = 5$ үед гарах тул

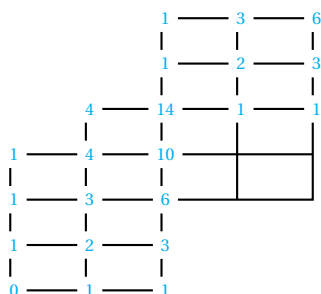
$$\begin{aligned} C_8^3 (3x)^3 (-y)^5 &= -27 C_8^3 x^3 y^5, \\ C_8^5 (3x)^5 (-y)^3 &= -243 C_8^5 x^5 y^3 \end{aligned}$$

болно. Коэффициентүүдийн нийлбэр нь

$$-27 C_8^3 - 243 C_8^5 = -27 C_8^3 - 243 C_8^3 = -270 C_8^3$$

16.7. n хүүхдийг нэг эгнээнд $n!$ янзаар жагсааж болох тул $29!$ байна.

16.8. Аливаа зангилааны цэг хүрэх замын тоо нь түүний зүүн ба доод зангилааны цэгүүд хүрэх замын тоонуудын нийлбэр тул



буюу нийт A цэгээс B цэгт 14 ялгаатай замаар, B цэгээс C цэгт 6 ялгаатай замаар очих тул A цэгээс C цэгт $14 \cdot 6 = 84$ ялгаатай замаар хүрнэ.

16.9. БОЛОЛЦОО үгэнд Б үсэг 1 удаа, О үсэг 4 удаа, Л үсэг 2 удаа, Ц үсэг 1 удаа орсон тул 1, 4, 2, 1 бүтэцтэй давталттай сэлгэмэлийн тоог олно.

$$P(1, 4, 2, 1) = \frac{(1 + 4 + 2 + 1)!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

16.10.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0.8 \cdot 0.75 = 0.6 = \frac{3}{5}$$

16.11. Бүх боломжийг жагсааж бичвэл хххх, хххо, ххох, хохх, оххх, ххоо, хохо, хоох, оххо, охох, оохх, хооо, охоо, оохо, ооох, оооо байна. 3 хүү, 1 охинтой 4 боломж байгаа тул магадлал нь $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ байна.

16.12. Зуутын оронд 6 цифр бичигдсэн тоо нь зөвхөн 600 байна.

Аравтын оронд нь 6 цифр бичигдсэн 600-аас бага тоонууд нь 6а, 16а, 26а, 36а, 46а, 56а хэлбэртэй байх бөгөөд а-ийн оронд 0-9 цифрүүд байж болох нийт $6 \cdot 10 = 60$ ширхэг тоо байна.

Нэгжийн оронд нь 6 цифр бичигдсэн 600-аас бага тоонуудыг дээрхтэй төстэй аргаар тооцоход 60 ширхэг байна. Иймд нийт $1 + 60 + 60 = 121$ ширхэг 6-ийн цифр ашиглана.

16.13. Зөв дарагдсан 3 тоог C_6^3 аргаар, буруу дарагдсан 3 тоог C_{30}^3 аргаар сонгож болох тул нийт $C_6^3 \cdot C_{30}^3$ янзаар яг 3 тоог зөв дарсан байж болно.

16.14. Бидний олох тоо $a + b + c + d = 20$ тэгшитгэлийн сөрөг биш бүхэл тоон шийдийн тоотой тэнцүү тул

$$C_{(4)}^{20} = \overline{C_4^{20}} = C_{20+4-1}^{20} = C_{23}^{20} = \frac{23!}{3! \cdot 20!} = 1771$$

16.15. Харилцан нийцгүй тул нийлбэр үзэгдлийн магадлал нь үзэгдэл тус бүрийн магадлалуудын нийлбэр буюу

$$0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$$

байна.

16.16. Хоёр шоо нь ялгаатай биетүүд тул тэдгээр дээр тусах тоонууд нь эрэмбэлэгдсэн хос үүсгэнэ. I шоон дээр буусан нүдийг a , II шоон дээр буусан нүдийг b гэвэл үүнийг (a, b) хос гэж үзэж болно. Манай бодлогын хувьд $a + b = n$ тоо хамгийн олондоо хэдэн удаа тусч болох вэ гэсэн бодлого болж байна.

$n = 1$ байх боломж байхгүй. $n = 7$ байх нь

$$(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (5, 1)$$

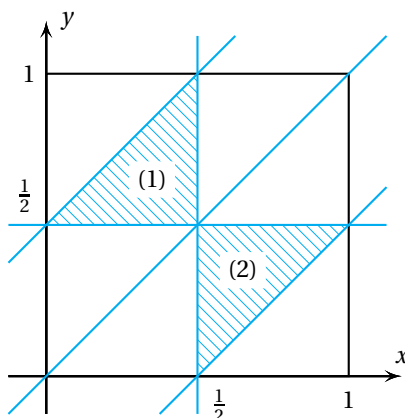
гэсэн 6 боломжтой. $n = 8$ байх нь

$$(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)$$

гэсэн 5 боломжтой ба $n = 10$ байх нь 3 боломжтой, $n = 11$ нь 2 боломжтой болохыг яг энэ байдлаар тооцож болно. Иймд хамгийн их магадлалтай нийлбэр нь 7 байна.

16.17. $x \leq y$ байх тохиолдолд хэрчмүүдийн урт x , $y - x$, $1 - y$ байна. Гурвалжны тэнцэтгэл бишээр

$$\begin{cases} x + (y - x) > 1 - y \\ x + (1 - y) > y - x \\ (1 - y) + (y - x) > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.5 < y \\ y < x + 0.5 \\ x < 0.5 \end{cases} \quad (1)$$



$y \leq x$ байх тохиолдолд хэрчмүүдийн урт y , $x - y$, $1 - x$ байна. Гурвалжны тэнцэтгэл бишээр

$$\begin{cases} y + (x - y) > 1 - x \\ y + (1 - x) > x - y \\ (1 - x) + (x - y) > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.5 < x \\ y < x - 0.5 \\ y < 0.5 \end{cases} \quad (2)$$

16.18.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

тул

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}$$

16.19.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{S} + 2 \cdot \frac{2}{S} + \dots + 2017 \cdot \frac{2017}{S} \\
 &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 2017^2}{1 + 2 + \dots + 2017} \\
 &= \frac{2017 \cdot (2017 + 1) (2 \cdot 2017 + 1)}{6} \quad \leftarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{2017 \cdot (2017 + 1) \cdot 2}{6} \\
 &= \frac{2 \cdot 2017 + 1}{3} = 1345
 \end{aligned}$$

16.20. 1-ээс 100 хүртэлх тоон дотор 3-т хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг тоо 34 ширхэг, 3-т хуваахад 0 эсвэл 2 үлдэгдэл өгдөг тоо тус бүр 33 ширхэг байна. Иймд нийлбэр нь 3-т хуваагдах 3 ялгаатай тоог

$$C_{34}^3 + C_{33}^3 + C_{33}^3 + C_{34}^1 C_{33}^1 C_{33}^1 = 53922$$

янзаар сонгож болно.

16.21. $A = \{ \{k, p\} | 1 \leq k < p \leq 12 \}$ үзэгдэл байг. Тэгвэл

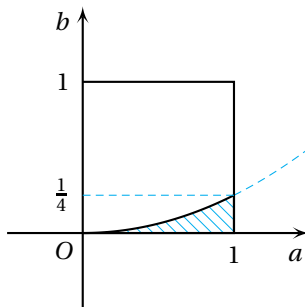
болно. Иймд $p(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}$ ба $p(B) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^1}{C_{20}^2}$ байна, учир нь $1 \leq k \leq 12$, $13 \leq p \leq 20$ үед л B үзэгдэл явагдана.

16.22.

1. Тус бүр 5 ($1 \leq a_i \leq 5$) боломжтой тул $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ байна.
2. Тус бүр 4 ($1 \leq a_i \leq 4$) боломжтой тул $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ байна.
3. Хамгийн их нь 5 байх боломжийн тоо өмнөх 2-ийн ялгавар буюу $125 - 64 = 61$ байна.

Нийт 216 боломжтой тул хамгийн их нь 5 байх магадлал $\frac{61}{216}$ байна.

16.23.



$a^2 - 4b < 0$ байх дүрсийн талбай нь $S = \int_0^1 \frac{a^2}{4} da$ интегралаар бодогдох тул

$$S = \left. \frac{a^3}{12} \right|_0^1 = \frac{1^3}{12} - \frac{0^3}{12} = \frac{1}{12} \text{ болно. Энэ хэсгийн талбай нь нэгж квадратын талбайн } \frac{1}{12} \text{ хэсэг}$$

тул квадратаас санамсаргүйгээр сонгосон цэг $a^2 - 4b < 0$ нөхцөлийг хангаж байх магадлал нь $\frac{1}{12}$ байна.

16.24.

1. Улаан өнгийн төгсгөлтэй хэрчмийн тоо $C_5^2 = 10$, хөх өнгийн төгсгөлтэй $C_2^2 = 1$, ногоон өнгийн төгсгөлтэй C_3^2 нийт $10 + 1 + 3 = 14$ ижил өнгийн төгсгөлтэй хэрчим байна.
2. Улаан оройг 5 янзаар, хөх оройг 2 янзаар, ногоон оройг 3 янзаар сонгох тул $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$.
3. Нийт гурвалжны тоо $C_{10}^3 = 120$. Улаан гурвалжны тоо $C_5^3 = 10$, хөх гурвалжин байхгүй, ногоон гурвалжин нэг тул ижил өнгийн гурвалжин нийт 11 байна. Санамсаргүйгээр авсан гурвалжин нэг өнгийн байх магадлал нь $\frac{11}{120}$.

16.25. Нийт 2 карт сонгох боломжийн тоо $C_{13}^2 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ байна.

1. 1 орсон 2 карт сонгох боломжууд нь $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \dots, \{1; 12\}$ нь гэсэн 12 боломж бий. Иймд магадлал нь $\frac{12}{C_{13}^2} = \frac{12}{78} = \frac{2}{13}$ байна.
2. 1 дугаартай карт ба тэгш дугаартай карт байх боломжууд нь $\{1; 2\}, \{1; 4\}, \dots, \{1; 12\}$ нь гэсэн 6 боломж бий. Иймд магадлал нь $\frac{6}{C_{13}^2} = \frac{6}{78} = \frac{1}{13}$ байна.
3. Тэгш дугаартай картууд нь 2, 4, 6, 8, 10, 12 тул 2-ийг нь сонгох боломжийн тоо $C_6^2 = 15$ байна. Иймд магадлал нь $\frac{15}{78} = \frac{5}{26}$ байна.

17. Комплекс тоо 2

17.1.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= i^{2018} \cdot i^{2019} = i^{2018+2019} = i^{4037} \\ &= i^{4 \cdot 1009 + 1} = (i^4)^{1009} \cdot i = 1^{1009} \cdot i \\ &= i \end{aligned}$$

17.2.

$$\begin{aligned} 3A + 2B - C &= 3(3 - i) + 2(-3 - 4i) - (-2 + 2i) \\ &= 9 - 3i - 6 - 8i - (-2) - 2i \\ &= (9 - 6 - (-2)) + (-3 - 8 - 2)i \\ &= 5 - 13i \end{aligned}$$

17.3.

$$z^2 = (1 - i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = -2i$$

тул

$$z^2 + z + 1 = -2i + (1 - i) + 1 = 2 - 3i$$

17.4.

$$\begin{aligned}(3 + i)(4 - i) &= (3 + 1 \cdot i)(4 + (-1)i) \\ &= (3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1)) + (3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4)i \\ &= 13 + i\end{aligned}$$

ба

$$\begin{aligned}(3 - i)(4 + i) &= (3 + (-1) \cdot i)(4 + 1 \cdot i) \\ &= (3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + (3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4)i \\ &= 13 - i\end{aligned}$$

тул

$$(3 + i)(4 - i) - (3 - i)(4 + i) = (13 + i) - (13 - i) = 2i$$

17.5. $(3 + 2i)x - (1 - i)y = 14 + 11i$ тул $(3x - y) + (2x + y)i = 14 + 11 \cdot i$ байна. Иймд комплекс тоонууд тэнцэх нөхцөл ёсоор

$$\begin{cases} 3x - y = 14 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

Тэгшитгэлүүдийг нэмбэл $5x = 25 \Rightarrow x = 5$ ба $y = 11 - 2 \cdot 5 = 1$ байна.

17.6. $x^2 + 2x + 10 = 0$ тэгшитгэлийн $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 < 0$ тул шийдүүд нь

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-(-36)} \cdot i}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6 \cdot i}{2} = -1 \pm 3i$$

байна.

17.7.

$$\begin{aligned}\text{Илэрх.} &= \frac{i}{1 + 3i} - \frac{1}{3 - i} \\ &= \frac{i(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} - \frac{3 + i}{3^2 + (-1)^2} \\ &= \frac{3 + i}{10} - \frac{3 + i}{5} = 0\end{aligned}$$

17.8.

$$|8 - 15i| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = \sqrt{289} = 17$$

17.9. $z^2 - 3z + 16 = 0 \Rightarrow \overline{z^2 - 3z + 16} = \overline{z}^2 - 3\overline{z} + 16 = 0$ буюу z ба $\overline{z}$ тоонууд

$$x^2 - 3x + 16 = 0$$

квадрат тэгшитгэлийн шийдүүд болно. Иймд Виетийн теоремоор $z \cdot \overline{z} = 16$ тул $|\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = 4$ болов.

17.10. $z = a + bi$ гэвэл $z + \overline{z}(2 - i) = 1 \Rightarrow (a + bi) + (a - bi)(2 - i) = 1$ болно. Эндээс

$$(a + bi) + (2a + b) - (a + 2b)i = (3a + b) - (a + b)i = 1$$

тул

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{4}$$

байна. Иймд $z = \frac{1+i}{4}$.**17.11.** $4 > 0$ тул $z = 4 + 3i$ тооны аргумент нь $\arg z = \arctg \frac{3}{4}$ байна.**17.12.**

$$\begin{aligned} \cos 510^\circ - i \sin 510^\circ &= \cos(510^\circ - 360^\circ) - i \sin(510^\circ - 360^\circ) \\ &= \cos 150^\circ - i \sin 150^\circ \\ &= \cos(-150^\circ) + i \sin(-150^\circ) \end{aligned}$$

17.13.

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - i \sin 75^\circ} \\ &= \frac{\cos(-15^\circ) + i \sin(-15^\circ)}{\cos(-75^\circ) + i \sin(-75^\circ)} \\ &= \cos(-15^\circ - (-75^\circ)) + i \sin(-15^\circ - (-75^\circ)) \\ &= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ \end{aligned}$$

тул

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^3 = \cos(3 \cdot 60^\circ) + i \sin(3 \cdot 60^\circ) = -1$$

17.14. $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$ шийдтэй квадрат тэгшитгэл нь Виетийн теорем ёсоор

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (1 + 2i + 1 - 2i)x + (1 + 2i)(1 - 2i) = 0$$

тул $x^2 - 2x + 5 = 0$ байна.**17.15.** $z = 1 - \sqrt{3}i$ тул

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

ба

$$\arg z = \arctg \frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

17.16. $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ тул

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)^{30} &= 2^{30} \cdot (\cos(30 \cdot 60^\circ) + i \sin(30 \cdot 60^\circ)) \\ &= 2^{30} \cdot (\cos 1800^\circ + i \sin 1800^\circ) = 2^{30} \end{aligned}$$

17.17.

$$\begin{aligned}
 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{2\pi}{6}} + \dots + e^{i\frac{2019\pi}{6}} &= \frac{1 - e^{i\frac{2020\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} \\
 &= \frac{1 - e^{i\frac{12\pi \cdot 168 + 4\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1 - e^{i\frac{4\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} \\
 &= 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{2\pi}{6}} + e^{i\frac{3\pi}{6}} \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + i \\
 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2}(1 + i) = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

17.18. $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$ байна. Иймд $z^3 = -1$ ба $z^6 = (z^3)^2 = (-1)^2 = 1$ болно.

17.19.

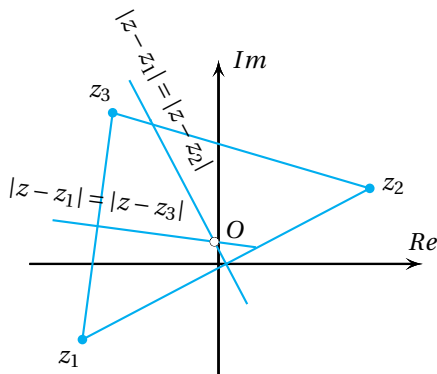
$$z^2 + 2zi + 1 = z^2 + 2zi^2 + i^2 - i^2 + 1 = (z + i)^2 + 2 = (z + i)^2 - (\sqrt{2}i)^2$$

тул

$$z^2 + 2zi + 1 = 0 \Leftrightarrow (z + i - \sqrt{2}i)(z + i + \sqrt{2}i) = 0$$

болно. Иймд $z_1 = (-1 + \sqrt{2})i$, $z_2 = (-1 - \sqrt{2})i$ байна.

17.20.



$|z - z_1| = |z - z_2|$ нь $z_1 z_2$ хэрчмийн дундаж перпендикуляр шулууны, $|z - z_1| = |z - z_3|$ нь $z_1 z_3$ хэрчмийн дундаж перпендикуляр шулууны тэгшитгэл тул эдгээрийн огтлолцолын цэг нь багтаасан тойргийн төв болно. Иймд зөв хариулт нь А юм.

17.21. $x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$ -д $x = i$, $x = -i$ утгуудыг орлуулбал

$$i^{10} + i^5 + 1 = (i^2 + 1)Q(i) + ai + b \Leftrightarrow i = ai + b$$

ба

$$(-i)^{10} + (-i)^5 + 1 = ((-i)^2 + 1)Q(-i) - ai + b \Leftrightarrow -i = -ai + b$$

тул $a = 1$, $b = 0$ байна. Иймд үлдэгдэл нь x байна.

17.22. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ тул

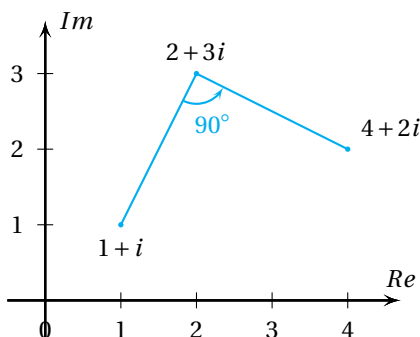
$$z \cdot \bar{z} + 4|z| + 5 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + 4|z| + 5 = 0$$

байна. $t = |z|$ гэвэл $t^2 + 4t + 5 = 0$ ба энэ тэгшитгэл бодит шийдгүй тэгшитгэл юм. Иймд өгөгдсөн тэгшитгэл ч мөн адил шийдгүй байна.

17.23.

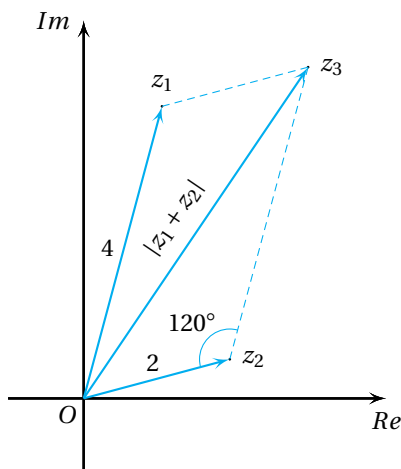
$$\sum_{n=0}^{2018} i^n = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2018} = \frac{i^{2019} - 1}{i - 1} = \frac{i^3 - 1}{i - 1} = i^2 + i + 1 = i$$

17.24.



зургаас хараахад $2+3i$ цэгийг тойруулан цагийн зүүний эсрэг чиглэлд $1+i$ цэгийг 90° өнцгөөр эргүүлэхэд $4+2i$ цэг гарч байна.

17.25.



Косинусын теорем ашиглавал

$$|z_1 + z_2|^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 28$$

тул $|z_1 + z_2| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ байна.

18. Огторгуй дахь вектор нэмэлт

18.1. Чиглүүлэгч вектор нь

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 0, 1) - (1, 2, 3) = (-3, -2, -2)$$

ба $A(1, 2, 3)$ цэгийг дайрсан шулуун тул тэгшитгэл нь

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

байна.

18.2. $\begin{cases} 3 + 2t = 7 + 2s \\ 8 - t = 4 + s \end{cases}$ систем тэгшитгэлээс $s = 4 - t$ ба $3 + 2t = 7 + 2(4 - t)$ тул $t = 3, s = 1$ гэж гарах ба

$$(2 + 2 \cdot 3, 8 - 3, -2 + 3 \cdot 3) = (7 + 2 \cdot 1, 4 + 1 \cdot 1, 3 + 4 \cdot 1) = (9, 5, 7)$$

тул $(9, 5, 7)$ цэгт огтлолцоно.

18.3. Чиглүүлэгч векторууд нь параллел тул параллел эсвэл давхцсан байна. $t = 0$ үед гарах $(2, 1, 0)$ цэг хоёр дугаар шулуунд харъяалагдах эсэхийг тогтооё. $s = -1$ үед

$$(2, 1, 0) = (4, 5, 6) + s(2, 4, 6)$$

биелэх тул $(2, 1, 0)$ цэг хоёр дугаар шулуунд харъяалагдана. Иймд хоёр шулуун давхцана.

18.4. Чиглүүлэгч векторууд нь параллел биш тул огтлолцсон эсвэл солбисон байна.

$\begin{cases} 2 - 3t = 1 + s \\ 3t = 3 - s \\ 1 + 3t = s \end{cases}$ систем тэгшитгэлийн хоёр ба гуравдугаар тэгшитгэлээс $t = \frac{1}{3}, s = 2$ гэж гарна. Гэвч энэ үед эхний тэгшитгэл

$$2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 1 + 2$$

тул системийн шийд болох s, t тоонууд олдохгүй. Иймд өгөгдсөн шулуунууд ерөнхий цэггүй ба параллел биш тул солбисон шулуунууд болно.

18.5. Чиглүүлэгч векторууд нь коллинеар тул энэ хоёр шулуун параллел эсвэл давхцсан байна. $t = 0$ үед гарах $(2, 8, 0)$ цэг хоёр дугаар шулуунд харъяалагдах эсэхийг тогтооё.

$$(2, 8, 0) = (0, 1, 10) + s(-2, -3, 1)$$

байх s тоо олдохгүй. Учир нь $2 = 0 - 2s \Rightarrow s = -1$ боловч $8 \neq 1 - 3 \cdot (-1)$ юм. Иймд өгөгдсөн хоёр шулуун параллел байна.

18.6. О цэгийн өгөгдсөн шулуун дээрх ортогонал проекцийн суурийг

$$A = (2, 8, 0) + t_0(2, 3, -1) = (2 + 2t_0, 8 + 3t_0, -t_0)$$

гэе. $OA \perp (2, 3, -1)$ тул

$$(2 + 2t_0) \cdot 2 + (8 + 3t_0) \cdot 3 + (-t_0) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 14t_0 + 28 = 0$$

буюу $t_0 = -2$ байна. Иймд $A(-2, 2, 2)$ болно.

$$d = |OA| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

18.7.

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 1 = 49$$

ба

$$|\vec{s}_1| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 9^2} = \sqrt{98}$$

$$|\vec{s}_2| = \sqrt{4^2 + 9^2 + 1^2} = \sqrt{98}$$

тул

$$\cos \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{49}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{98}} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$$

байна. Иймд эдгээр шулуунуудын хоорондох өнцөг нь 60° байна.

18.8. $(0, y, 0)$ цэг шулуун дээр орших тул

$$3 \cdot 0 - 4y + 5 \cdot 0 - 8 = 0$$

байна. Иймд $y = -2$ буюу $(0, -2, 0)$ цэгт огтлолно.

18.9. Шалгахад илүү хялбар тул $y - 3z + 4 = 0$ тэгшитгэлийг авч үзье.

$$2 - 3 \cdot 2 + 4 = 0$$

$$0 - 3 \cdot 1 + 4 \neq 0$$

$$2 - 3 \cdot 3 + 4 \neq 0$$

$$-3 - 3 \cdot (-2) + 4 \neq 0$$

тул зөвхөн эхний хоёр цэг л огтлолцол дээр орших боломжтой. Түүнчлэн

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 2 \neq 0$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 2 = 0$$

тул зөвхөн $(0, 2, 2)$ цэг хавтгайнуудын огтлолцол дээр оршино.

18.10. $1 - 1 + 5 - 5 = 0$, $3 + 4 - 5 - 2 = 0$ тул $(1; 1; 5)$ цэг хавтгайнууд дээр оршино.

18.11. Ох тэнхлэг ба $3x - 4y + 5z + 12 = 0$ хавтгайн огтлолын цэг

$$3x - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 12 = 0 \Rightarrow (4, 0, 0)$$

, Оу тэнхлэг ба $3x - 4y + 5z + 12 = 0$ хавтгайн огтлолын цэг

$$3 \cdot 0 - 4y + 5 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow (0, 3, 0)$$

болно. Эдгээрийн хоорондох зай нь

$$d = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = 5.$$

18.12. $(0, 0, t)$ цэг $x + y - 2z + 5 = 0$ хавтгайд харъяалагдах тул $0 + 0 - 2t + 5 = 0$ буюу $t = 2.5$ болно. Иймд огтлолцлын цэг нь $(0, 0, 2.5)$ байна.

18.13.

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ 3x + 4y + z - 11 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

1-р тэгшитгэлээс 3-р тэгшитгэлийг хасвал

$$(2x - y + z - 5) - (x - y + z - 4) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

буюу $x = 1$ байна. Үүнийг 1 ба 2-р тэгшитгэлд орлуулбал $2 - y + z - 5 = 0$, $3 + 4y + z - 11 = 0$ болно. Эдгээрийн ялгавар нь

$$(2 - y + z - 5) - (3 + 4y + z - 11) = -5y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$$

болно. Иймд $2 - 1 + z - 5 = 0$ буюу $z = 4$ байна. Иймд огтлолцолын цэгийн координат нь $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ байна.

18.14.

$$2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 5 \neq 0$$

$$2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 5 \neq 0$$

$$2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 5 \neq 0$$

$$2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 5 = 0$$

$$2 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 5 \neq 0$$

зөвхөн $x + 2y - 3z - 6 = 0$ шулуунд л P цэг харъяалагдана. Иймд зөв хариулт нь D юм.

18.15. $A(1, 3, -2)$, $B(3, -9, 7)$, $C(4, -4, 5)$ Тодорхойлогч хэлбэрээр бичсэн тэгшитгэл ашиглавал

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3-1 & -9-3 & 7+2 \\ 4-1 & -4-3 & 5+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 2 & -12 & 9 \\ 3 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

байна. Тодорхойлогчийг I мөрөөр задалж бодвол

$$\begin{vmatrix} -12 & 9 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} (y-3) + \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} (z+2) = 0$$

буюу

$$-21(x-1) + 13(y-3) + 22(z+2) = 0 \Leftrightarrow 21x - 13y - 22z - 26 = 0$$

байна.

18.16. $(1 + 2t, 1 + t, 3 - t)$ цэг $2x + y - 5z = 8$ хавтгайд харъяалагдах t параметрийн утгыг олж.

$$2(1 + 2t) + 1(1 + t) - 5(3 - t) = 8 \Leftrightarrow 10t - 15 = 5$$

буюу $t = 2$ байна. Иймд огтлолцлын цэг нь $(1 + 2 \cdot 2, 1 + 2, 3 - 2) = (5, 3, 1)$ байна.

18.17. $(1 + 3t, 1 + 2t, 3 - t)$ цэг $4x - y + 10z = 2$ хавтгайд харъяалагдах t параметрийн утгыг олж.

$$4(1 + 3t) - (1 + 2t) + 10(3 - t) = 2 \Leftrightarrow 33 = 2$$

буюу шийдгүй тэгшитгэл үүсч байна. Иймд шулуун, хавтгай хоёр ерөнхий цэггүй буюу параллел байна.

18.18. $(1+2t, 1+t, 3-t)$ цэг $x+2y+4z=15$ хавтгайд харъяалагдах t параметрийн утгыг олж.

$$(1+2t) + 2(1+t) + 4(3-t) = 15 \Leftrightarrow 15 = 15$$

гэсэн төгсгөлгүй олон шийдтэй тэгшитгэл үүсч байна. Өөрөөр хэлбэл t параметрийн дурын утгад $(1+2t, 1+t, 3-t)$ цэг $x+2y+4z=15$ хавтгайд харъяалагдаж байна. Иймд шулуун нь хавтгайдаа агуулагдана.

18.19. Чиглүүлэгч ба нормалын хоорондох өнцгийн косинус нь

$$\frac{2 \cdot (-3) + (-7) \cdot 4 + (-5) \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{-39}{\sqrt{78} \cdot \sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

тул хоорондох өнцөг нь 150° байна. Иймд шулуун ба хавтгайн хоорондох өнцөг нь $|90^\circ - 150^\circ| = 60^\circ$ байна.

18.20. $\vec{n}_1 = (1, 4, 3)$, $\vec{n}_2 = (7, 2, 8)$ нормал векторуудын хоорондох өнцгийн косинус нь

$$\cos \theta = \frac{1 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 8}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{7^2 + 2^2 + 8^2}} = \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

тул хоёр хавтгайн хоорондох өнцөг 45° байна.

18.21. Хоёр хавтгайн хоорондох зай

$$d = \frac{|45 - (-15)|}{\sqrt{2^2 + (-11)^2 + 10^2}} = \frac{60}{\sqrt{225}} = 4$$

18.22. $(0, 0, z)$ цэгээс $2x - 3y + 6z - 4 = 0$ хавтгай хүртэлх зайг бодвол

$$d = \frac{|6z - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = 4 \Leftrightarrow |6z - 4| = 28$$

байна. Эндээс $6z - 4 = 28$ эсвэл $6z - 4 = -28$ тул $z_1 = 5\frac{1}{3}$, $z_2 = -4$ байна.

18.23. $\vec{n} = (a, b, c)$ гэе. Тэгвэл $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$ байна. Иймд

$$\begin{cases} 2a - b + 5c = 0 \\ a + 3b - c = 0 \end{cases}$$

байна. $c = t$ гэвэл $a = -2t$, $b = t$ байна. $t = 1$ үед $\vec{n} = (-2, 1, 1)$ байна. $M(1, 1, -1)$ цэгийг дайрсан $\vec{n}$ нормалтай хавтгайн тэгшитгэл

$$-2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z+1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + z + 2 = 0$$

байна.

18.24.

1. ℓ шулууны $t = 0$ байх цэг нь $(1, 0, -1)$, $t = 1$ байх цэг нь $(3, 1, -1)$ байна. $M(0, 1, 2)$ цэг ба эдгээр цэгүүдийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1-0 & 0-1 & -1-2 \\ 3-0 & 1-1 & -1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

буюу

$$3x - 6(y-1) + 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

2. ℓ шулууны чиглүүлэгч нь $(2, 1, 0)$ тул $(0, 1, 2)$ цэгийг дайрсан $(2, 1, 0)$ нормалтай хавтгайн тэгшитгэл буюу

$$2(x-0) + 1(y-1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$$

байна.

3. ℓ шулууны чиглүүлэгч нь $(2, 1, 0)$ тул $(0, 1, 2)$ цэгийг дайрсан $(2, 1, 0)$ чиглүүлэгчтэй шулууны тэгшитгэл буюу

$$\mathbf{r} = (0, 1, 2) + t(2, 1, 0)$$

байна.

18.25.

1. $\overrightarrow{MM_0} \perp \ell$ байх M_0 цэгийг ℓ шулуун дээр олж. $M_0 = (1 + 2t, t, -1)$ тул

$$\overrightarrow{MM_0} = M_0 - M = (1 + 2t, t, -1) - (-2, 1, -3) = (2t + 3, t - 1, 2)$$

байна. ℓ шулуун чиглүүлэгч вектор $(2, 1, 0)$ нь $\overrightarrow{MM_0}$ -тай перпендикуляр тул

$$2 \cdot (2t + 3) + 1 \cdot (t - 1) + 0 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow t = -1$$

байна. Иймд $M_0 = (-1, -1, -1)$ ба

$$|MM_0| = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2 + (-1 + 3)^2} = 3$$

байна.

2. M_0 цэгийн хувьд M -тэй тэгш хэмтэй цэг тул

$$2M_0 - M = (-2, -2, -2) - (-2, 1, -3) = (0, -3, 1)$$

байна.

19. Алгебр, анализийн нэмэлт 2

- 19.1. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $(x+2)^5 = x^2 \cdot Q(x) + C_5^4 \cdot x \cdot 2^4 + 2^5$ тул x -ийн өмнөх коэффициент нь

$$2 \cdot 2^5 + 1 \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 64 + 80 = 144$$

- 19.2. $(3x^2 - 2x - 1)^4 = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + \dots + a_1x + a_0$ -д $x = 1$, $x = -1$ гэж орлуулаад хасъя.

$$\begin{aligned} (3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1)^4 - (3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1)^4 &= -4^4 = -256 = \\ &= (a_8 + a_7 + a_6 + \dots + a_1 + a_0) - (a_8 - a_7 + a_6 - \dots - a_1 + a_0) = \\ &= 2(a_7 + a_5 + a_3 + a_1) \Rightarrow a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = -128. \end{aligned}$$

19.3.

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

тул

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

буюу

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 3B}{(x-3)(x-2)}$$

байна. Иймд

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

байна.

19.4. $x=0$ үед

$$\frac{3 \cdot 0 + 1}{(0-1)^2} = \frac{A}{0-1} + \frac{B}{(0-1)^2} \Leftrightarrow 1 = -A + B$$

тул $A - B = -1$ байна.

19.5.

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

тул

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

буюу

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 3B}{(x-3)(x-2)}$$

байна. Иймд

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$$

байна.

19.6.

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

тул

$$x^2+1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$

байна. $x=0$ үед $1 = A(0+1)(0+2)$ тул $A = \frac{1}{2}$, $x=-1$ үед $(-1)^2+1 = B(-1)(-1+2)$ тул $B = -2$, $x=-2$ үед $(-2)^2+1 = C(-2)(-2+1)$ тул $C = \frac{5}{2}$ байна. Иймд

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{\frac{5}{2}}{x+2}$$

19.7.

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-1}$$

бол

$$1 = A(x-2)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-2)(x-3)$$

болно. $x=1, 2, 3$ утгуудыг орлуулбал $2C=1$, $-B=1$, $2A=1$ болох тул $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ байна. Иймд

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-3)(x-2)(x-1)} &= \frac{\frac{1}{2}}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \dots$$

тул x^2 -ийн өмнөх коэффициент нь

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} = -\frac{85}{216}$$

байна.

19.8. 1-р бодолт. $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2^1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots \right)$ тул

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{2^1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots \right) \left(1 + \frac{x}{2^1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots \right)$$

болно. Эндээс x^3 -ийн коэффициент нь

$$\frac{1}{4} \left(1 \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{8}$$

байна. 2-р бодолт. $\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-2}$ ба

$$\left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-2} = 1 - \binom{-2}{1} \cdot \frac{x}{2} + \binom{-2}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \binom{-2}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots$$

тул x^3 -ийн коэффициент нь

$$-\frac{1}{4} \cdot \binom{-2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

байна.

19.9. $2 \cdot \left(1 + \left(-\frac{x}{4} \right) \right)^{\frac{1}{3}}$ илэрхийллийг өргөтгөсөн биномын томьёо ашиглан цуваанд задлавал

$$2 + 2 \cdot \binom{\frac{1}{3}}{1} \left(-\frac{x}{4} \right) + 2 \cdot \binom{\frac{1}{3}}{2} \left(-\frac{x}{4} \right)^2 + 2 \cdot \binom{\frac{1}{3}}{3} \left(-\frac{x}{4} \right)^3 + \dots$$

тул 4-р гишүүн нь

$$2 \cdot \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} \cdot \frac{-1}{4^3} x^3 = -\frac{5}{2592} x^3$$

байна.

19.10.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2}{x+1} dx &= \int \left(x-1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \int x dx - \int dx - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$19.11. \frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \text{ -ээс}$$

$$A(x+3) + B(x-3) = 2x+3 \Rightarrow Ax+3A+Bx-3B=2x+3$$

тул

$$(A+B)x+3A-3B=2x+3$$

буюу

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Иймд

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{\frac{3}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}$$

болох ба интеграл нь

$$\int \frac{2x+3}{x^2-9} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} = \frac{3}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{2} \ln|x+3| + C$$

$$19.12. \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \text{ бол}$$

$$A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) = x^2$$

буюу

$$(A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + 6A+3B+2C = x^2$$

тул

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-4 \\ C=\frac{9}{2} \end{cases}$$

Иймд

$$\begin{aligned} \text{Инт.} &= \int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{\frac{9}{2}}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - 4 \int \frac{dx}{x-2} + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x-3} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - 4 \ln|x-2| + \frac{9}{2} \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

19.13.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+2x+7}{x^2+1} dx &= \int \left(3 + \frac{2x+4}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int 3dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 3x + \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 4 \operatorname{arctg} x \\ &= 3x + \ln(x^2+1) + 4 \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

19.14. $\frac{5x}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$ бол

$$A + B(x-1) + C(x-1)^2 = 5x$$

буюу

$$Cx^3 + (B-2C)x^2 + A-B+C = 5x$$

тул

$$\begin{cases} C=0 \\ B-2C=5 \\ A-B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=5 \\ C=0 \end{cases}$$

Иймд

$$\begin{aligned} \text{Инт.} &= \int \frac{5x}{(x-1)^3} = \int \left(\frac{5}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= 5 \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 5 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= 5 \cdot \frac{(x-1)^{-2}}{-2} - \frac{5}{x-1} + C \\ &= -\frac{5}{2(x-1)^2} - \frac{5}{x-1} + C \end{aligned}$$

19.15.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4x+8} &= \int \frac{dx}{x^2+4x+4+4} \\ &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \\ &= \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C \end{aligned}$$

19.16. $\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ бол

$$A(x^2+1)(x+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x^2-1) = 1$$

буюу

$$(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + A-B-D = 1$$

тул

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Иймд

$$\begin{aligned}
 \text{Инт.} &= \int \frac{dx}{x^4-1} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctg x + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctg x + C
 \end{aligned}$$

19.17. $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ бол

$$A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$$

буюу

$$(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C = 1$$

тул

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Иймд

$$\begin{aligned}
 \text{Инт.} &= \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} \\
 &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\
 &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \arctg x + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln(x+1)^2 - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctg x + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x + C
 \end{aligned}$$

19.18. $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ бол

$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$$

буюу

$$(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C = 1$$

тул

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Иймд

$$\begin{aligned} \text{Инт.} &= \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ &= \frac{1}{6} \ln(x+1)^2 - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

19.19. $\frac{3x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$ бол

$$3x+1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

байна. $x=0, -1, 2$ утгууд дээр бодвол $1 = -2A$, $-2 = 3B$, $7 = 6C$ тул

$$\frac{3x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{7}{6}}{x-2}$$

болно. Иймд

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x(x+1)(x-2)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{7}{6}}{x-2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} + \frac{7}{6} \int \frac{1}{x-2} + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{7}{6} \ln|x-2| + C \\ &= -\frac{1}{6} \ln|x^3| - \frac{1}{6} \ln(x+1)^4 + \frac{1}{6} \ln|x-2|^7 + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x-2)^7}{x^3(x+1)^4} \right| + C \end{aligned}$$

19.20. $u = x$, $v' = e^{3x}$ гэвэл $u' = 1$ болох ба $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ гэж сонгоё.

$$\int x e^{3x} dx = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot x - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

болно.

19.21.

$$x y' + y = y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x}$$

тул

$$\ln |y - 1| - \ln |y| = \ln |x| + C$$

$x = 1$ үед $y = 0.5$ тул $\ln 0.5 - \ln 0.5 = \ln 1 + C \Rightarrow C = 0$ байна. Иймд $\left| \frac{y-1}{y} \right| = |x|$ ба $(1, 0.5)$

цэгийн орчинд $\frac{y-1}{y} < 0$, $x > 0$ тул $-\frac{y-1}{y} = x$ буюу $y = \frac{1}{x+1}$ байна.

19.22.

$$\frac{dy}{dx} = y(y+2) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(y+2)} = dx$$

байна.

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} \Rightarrow 1 = A(y+2) + By$$

тул $A + B = 0$, $2A = 1$ байна. Иймд $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ байна.

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int dx + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} \right) dy = \int dx$$

$$\frac{1}{2} (\ln |y| - \ln |y+2|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = x + C$$

$x = 0$, $y = -1$ үед $\frac{1}{2} (\ln |-1| - \ln |-1+2|) = 0 + C$ тул $C = 0$ байна. Түүнчлэн $(0, -1)$ цэгийн орчинд $\frac{y}{y+2} < 0$ тул

$$-\frac{y}{y+2} = e^{2x} \Leftrightarrow \frac{y}{y+2} = -e^{2x}$$

байна.

19.23.

$$m'(t) = k m(t) \Leftrightarrow \int \frac{dm(t)}{m(t)} = k \Leftrightarrow \ln |m(t)| = kt + C$$

тул $m(t) = e^{kt+C} = \mu e^{kt}$ болно. $m(0) = 156$ тул $\mu = 156$ ба $m(1) = 156e^k = 144$ тул

$$e^k = \frac{144}{156} = \frac{12}{13} \text{ болно. Иймд}$$

$$m(t) = 144 \cdot \left(\frac{12}{13} \right)^t$$

болно.

19.24. Тэгшитгэлийг хувиргаж бичвэл

$$y'(x) - \frac{2}{2x+1} \cdot y = \frac{4x}{2x+1}$$

болно.

$$-\int \frac{2dx}{2x+1} = -\ln|2x+1| + C$$

тул $\mu(x) = e^{-\ln(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$ интегралчлагч үржигдэхүүнээр үржүүлбэл

$$\mu'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2} \text{ тул}$$

$$\mu(x)y'(x) + \mu'(x) \cdot y = \frac{4x}{(2x+1)^2}$$

болно. Хоёр талыг нь интегралчилбал

$$\mu(x)y = \int \frac{4xdx}{(2x+1)^2} = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C$$

тул

$$y = (2x+1) \ln|2x+1| + 1 + C(2x+1)$$

байна.

19.25.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x-8}}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x-8} \\ x = t^3+8 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right] \\ &= \int \left(\frac{t}{t^3+8} \right) 3t^2 dt = \int \frac{3t^3 dt}{t^3+8} = \int \left(3 - \frac{24}{t^3+8} \right) dt \\ &= 3t - \int \frac{24 dt}{t^3+8} + \int \frac{2t-8}{t^2-2t+4} dt \\ &= 3t - 2\ln|t+2| + \int \frac{2(t-1)-6}{(t-1)^2+3} dt \\ &= 3t - 2\ln|t+2| + \int \frac{d[(t-1)^2+3]}{(t-1)^2+3} - \int \frac{6dt}{(t-1)^2+(\sqrt{3})^2} \\ &= 3t - 2\ln|t+2| + \ln|(t-1)^2+3| - \frac{6}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= 3t - 2\ln|t+2| + \ln(t^2-2t+4) - \frac{6}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= 3\sqrt[3]{x-8} - 2\ln|\sqrt[3]{x-8}+2| + \ln((\sqrt[3]{x-8})^3 - 2\sqrt[3]{x-8} + 4) - \frac{6}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt[3]{x-8}+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

20. Магадлал, статистикийн нэмэлт 2

20.1. Хамгийн их нь 21.6, хамгийн бага нь 1.6 тул далайц нь $21.6 - 1.6 = 20$ байна.

20.2. Насны бүлгүүд нь ижил урттай тул моод бүлэг нь хамгийн их давтамжтай бүлэг байна. Иймд моод бүлэг нь 25-29 байна. Нийт өгөгдлийн тоо

$$244980 + 310730 + 283360 + 241307 + 217532 + 186765 + 161016 + 128739 = 1774429$$

ба голын тоо нь 887215 байна.

$$244980 + 310730 + 283360 < 887217 < 244980 + 310730 + 283360 + 241307$$

тул медиан нь 35-39 бүлэгт байна.

20.3. Завсар тус бүрийн дунжийг олбол

Оноо	Дундаж	Сурагчдын тоо
200-299	249.5	14
300-399	349.5	108
400-499	449.5	252
500-599	549.5	228
600-699	649.5	40
700-800	750	8

тул сурагчдын дундаж оноо

$$\frac{249.5 \cdot 14 + 349.5 \cdot 108 + 449.5 \cdot 252 + 549.5 \cdot 228 + 649.5 \cdot 40 + 750 \cdot 8}{14 + 108 + 252 + 228 + 40 + 8} = \frac{311779}{650} = 479.66$$

20.4. Өгөгдлийг өгсөх эрэмбээр жагсааж бичвэл

1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 8, 9, 10

тул хамгийн бага утга нь 1, хамгийн их утга нь 10 болно. Тэгш тооны өгөгдөл байгаа тул медиан нь голын хоёр өгөгдлийн арифметик дундаж буюу $\frac{6+7}{2} = 6.5$ байна. Доод кватил нь

1, 1, 2, 4, 6

өгөгдлийн медиан тул 2, дээд кватил нь

7, 7, 8, 9, 10

өгөгдлийн медиан тул 8 байна. Иймд зөв сонголт нь 1) юм.

20.5. Тоо тус бүр ижил $\frac{1}{n}$ магадлалтай сонгогдох тул математик дундаж нь

$$\begin{aligned} 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n^2 \cdot \frac{1}{n} &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

20.6. Боломжит 2 оронтой тоонууд нь 11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55 байна. Эдгээрийн цифрүүдийн нийлбэр нь харгалзан 2, 4, 6, 4, 6, 8, 6, 8, 10 байна. Иймд математик дундаж нь

$$\frac{2 + 4 + 6 + 4 + 6 + 8 + 6 + 8 + 10}{9} = 6$$

байна. Бүх тоонууд ижилхэн $\frac{1}{9}$ магадлалтай тул цифрүүдийн нийлбэрийн стандарт хазайлт нь

$$\sqrt{\frac{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2}{9}} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

20.7. Шоог i -р удаад хаяхад 6 буусан бол $X_i = 1$, өөр тоо буусан бол $X_i = 0$ гэе. Тэгвэл $P(X_i = 0) = \frac{5}{6}$, $P(X_i = 1) = \frac{1}{6}$ байна. Иймд

$$E(X_i) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$Var(X_i) = 0^2 \cdot \frac{5}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} - E^2(X_i) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

Шоог n удаа хаяхад 6 буух тоо нь $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ тул дисперс нь

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n) = \frac{5n}{36}$$

байна.

20.8.

$$Var(X) = 100 \cdot 0.64 \cdot (1 - 0.64) = 100 \cdot 0.64 \cdot 0.36$$

ба

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 10 \cdot 0.8 \cdot 0.6 = 4.8$$

байна.

20.9.

$$P(X = 2) = C_4^2 \cdot 0.15^2 \cdot (1 - 0.15)^2 \approx 0.1$$

20.10. $X < 22 \Leftrightarrow Z = \frac{X - 19}{7} < \frac{22 - 19}{7} = 0.571$ тул

$$P(X < 22) = P(Z < 0.571) = 0.5 + \Phi(0.571)$$

байна.

20.11. Geogebra программ ашиглан тооцоолоход $P(X \leq 552) = 0.6985$, $P(X \leq 553) = 0.7019$ байгаа тул Бат дор хаяж 553 оноо авах шаардлагатай.

20.12. Тасралтгүйн засвар оруулбал

$$P(699.5 < x) = P\left(\frac{699.5 - 500}{100} < z\right) = P(1.995 < z)$$

байна. z нь $N(0, 1)$ хэвийн тархалттай санамсаргүй хувьсагч тул

$$P(1.995 < z) = 0.5 - \Phi(1.995) \approx 0.5 - 0.477 = 0.023$$

буюу 700-аас багагүй оноо авах магадлал нь 2.3% байна.

20.13.

$$\begin{aligned} Var(P_1 - P_2) &= Var(P_1) + Var(-P_2) = Var(P_1) + Var(P_2) \\ &= 100 \cdot 0.48 \cdot (1 - 0.48) + 100 \cdot 0.53 \cdot (1 - 0.53) \\ &= 24.96 + 24.91 = 49.87 \end{aligned}$$

тул $\sigma(P_1 - P_2) = \sqrt{49.87} \approx 7.06$ байна. $N(-6, 7.06^2)$ хэвийн тархалт ашиглан $P = P_1 - P_2 < 0$ байх магадлалыг олж.

$$Z = \frac{P - (-6)}{7.06}$$

стандарт хэвийн тархалттай тул

$$P(p < 0) = P\left(z < \frac{6}{7.06}\right) \approx P(z < 0.85) = 0.5 + \Phi(0.85)$$

байна. Лапласын функцийн хүснэгт ашиглаж бодвол $\Phi(0.85) = 0.3023$ тул

$P(p < 0) = 0.5 + 0.3023 \approx 0.80$ байна.

20.14. $\sigma^2 = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5} = 2.24$ байна. $X \sim N(10, 5)$ тул $z = \frac{x-10}{\sqrt{5}}$ нь $N(0, 1)$ хэвийн тархалттай байна. Тасралтгүйн засварыг оруулж тооцвол

$$P(3 \leq X \leq 9) = P(2.5 < X < 9.5) = P\left(\frac{2.5-10}{2.24} < z < \frac{9.5-10}{2.24}\right)$$

буюу

$$P(-3.35 < z < -0.22) = (0.5 - \Phi(0.22)) - (0.5 - \Phi(3.35)) = 0.4996 - 0.0871 \approx 0.41$$

байна.

20.15. Байг гурван удаа онох үзэгдлийн магадлал $0.9^3 = 0.729$. Ядаж нэг удаа алдах магадлал нь үүний эсрэг үзэгдэл тул $p = 1 - 0.729 = 0.271$ байна.

Жич: Өөр нэмэлт нөхцөл өгөөгүй тул бид анчин өөр хоорондоо хамааралгүйгээр буудна гэж үзэв. Өөрөөр хэлбэл A_1, A_2, A_3 нь харгалзан 1, 2, 3-р буудалтаар байг онох үзэгдлүүд бөгөөд тус бүрдээ 0.9 магадлалтай явагдах ба

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.9^3 = 0.729$$

байна.

20.16. 1-р бодолт. I тоглогч эхний хаялтаараа $\frac{1}{2}$ магадлалтай хожих тул хожих магадлал нь $\frac{1}{2}$ -ээс их байна. II тоглогч эхний хаялтаар хожихын тулд I тоглогч эхний хаялтаараа

тоо буулгасан байх ёстой ба өөрөө сүлд буулгах ёстой тул магадлал нь $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ байна.

Иймд I тоглогчийн хожих магадлал $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ -аас бага байна. Иймд боломжит зөв хариулт

нь $\frac{2}{3}$ байна. 2-р бодолт. $\underbrace{T T \dots T}_{2k}$ үздэгдлийн магадлал $\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$ байна. Иймд I тоглогч

хожих үзэгдлийн магадлал

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2k+1}} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

байна.

20.17. $P(\overline{A_i}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ байна. Иймд $P(\overline{A_1} A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

байна. Бидний олох үзэгдэл нь

$$A = A_1 + \overline{A_1} A_2 + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$$

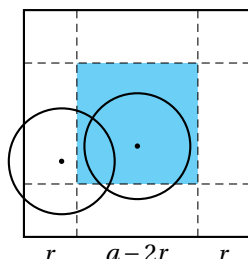
ба дээрх үзэгдлүүд нь харилцан нийцгүй үзэгдлүүд тул

$$P(A) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{26}{27}$$

байна.

20.18. $A(x)$, $B(x+5)$ цэгүүдийн хоорондуур танк гарсан бөгөөд танкны төв цэг $T(t)$ гэвэл $AB = 5$ ба танк дэлбэрэлгүйгээр фронтын шугам нэвтрэх хэсэг нь T цэг $C(x+1.5)$ ба $D(x+3.5)$ цэгүүдийн хооронд орших юм. Ийм бидний олох магадлал нь $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{2}{5}$ байна.

20.19.



Зургаас харахад цэнхэр квадрат дотор тойргийн төв байх үед уг тойрог квадратын талыг огтлохгүй байна. Иймд бидний олох магадлал нь цэнхэр квадратын талбайг, том квадратын талбайд харьцуулсан харьцаа буюу $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$ байна.

20.20. Нийт боломжийн тоо нь

$$P(3, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{9!}{3! \cdot 2!}$$

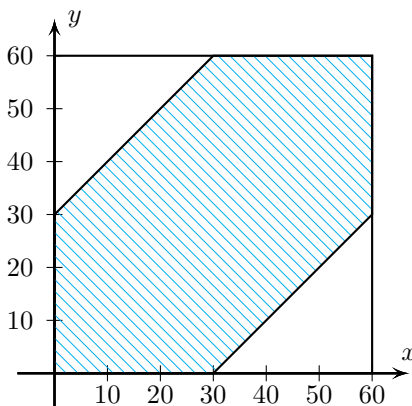
үүнээс бүх Д үсгүүд дараалж орсон нь

$$P(2, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{7!}{2!}$$

тул Д үсгүүд бүгд нэг дор дараалж орсон байх магадлал нь

$$\frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{9!}{3! \cdot 2!}} = \frac{7! \cdot 3! \cdot 2!}{9! \cdot 2!} = \frac{3!}{8 \cdot 9} = \frac{1}{12}$$

20.21. Уулзах муж буюу $|x - y| \leq 30$ мужийг дүрсэлбэл

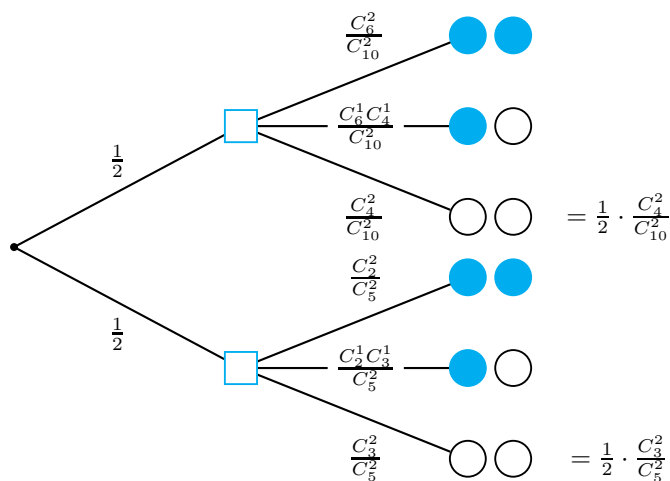


болно. Энэ нь нийт мужийн $\frac{3}{4}$ хэсэг болох тул уулзах магадлал нь $\frac{3}{4}$ байна.

20.22. 1-р бодолт. $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(X|A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2}$, $P(X|B) = \frac{C_3^2}{C_5^2}$ тул

$$\begin{aligned} P(X) &= P(XA) + P(XB) \\ &= P(X|A) \cdot P(A) + P(X|B) \cdot P(B) \\ &= \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

2-р бодолт.

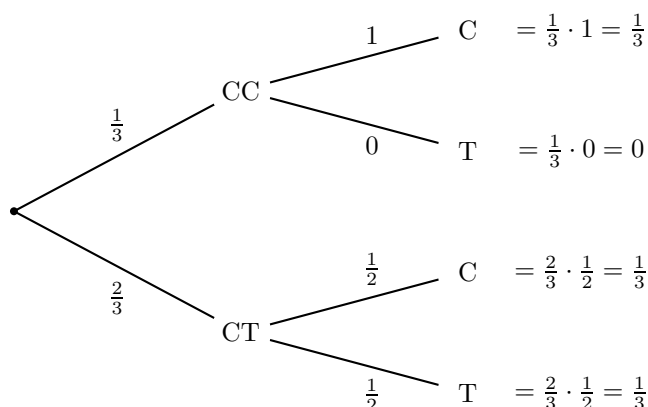


Бидний олох магадлал нь

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{C_4^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{45} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{15} + \frac{3}{20} = \frac{13}{60}$$

байна.

20.23.



Энд CC нь хоёр талдаа сүлдтэй зоос, CT нь сүлд ба тоотой зоосыг, C нь сүлд буусныг, T нь тоо буусныг тус тус тэмдэглэж байгаа болно. Сүлд буух магадлал нь

$$P(C) = P(C|CC) + P(C|CT) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ба сүлд буусан байх үед тэр нь CC зоос байх магадлал нь

$$P(CC|C) = \frac{P(C|CC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

байна.

20.24.

8					
6					
4					
2					
	1	3	5	7	9

Хүснэгтэд Б хүн хожих боломжуудыг будаж тэмдэглэлээ. Нийт 20 нүднээс 10 нь будагдсан тул Б хүн хожих магадлал $\frac{1}{2}$. Б хүн 2 оноо аваад хожих 1 боломжтой тул магадлал нь $\frac{1}{20}$, 4 оноо аваад хожих 2 боломжтой тул магадлал нь $\frac{2}{20}$, 6 оноо аваад хожих 3 боломжтой тул магадлал нь $\frac{3}{20}$, 8 оноо аваад хожих 4 боломжтой тул магадлал нь $\frac{4}{20}$ байна. Түүнчлэн 0

оноо авах буюу хожигдох магадлал нь $\frac{1}{2}$ тул Б хүний онооны математик дундаж

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{2}{20} + 6 \cdot \frac{3}{20} + 8 \cdot \frac{4}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

байна.

20.25.

1. Нийт $13 \cdot C_4^2 = 78$ хос бий. Нийт $C_{52}^2 = 1326$ боломж байгаа тул магадлал нь $\frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$.
2. Үлдэх моднуудаас хос үүсгэх боломжийн тоо нь $12 \cdot C_4^2 + 1 = 73$ байна. Үлдэх моднуудаас 2-ийг сонгох боломжийн тоо C_{50}^2 тул магадлал нь $\frac{73}{C_{50}^2}$.
3. Бидний олох магадлал нь $P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)$ ба $C_{50}^2 = 1225$ тул $P(B|A) = \frac{73}{1225}$, $P(A) = \frac{1}{17}$ тул $P(AB) = \frac{73}{20825}$ байна.

Интеграл-Онлайн сургалтын төв

Үйл ажиллагааны үндсэн чиглэл

Онлайн болон танхимын сургалт. Бид 2013 оноос хойш төрөл бүрийн онлайн сургалт, онлайн сорилго зохион байгуулж нийт 10 мянга гаруй бодолт, заавартай бодлогын санг бүрдүүлээд байна. Мөн 2018 оны 2-р сараас эхлэн математикийн хичээлээр ЭЕШ, олимпиад, гадаадын их дээд сургуулийн элсэлтийн шалгалтад бэлдэх танхимын сургалт явуулж байна.

Багшийн товч танилцуулга

Овог нэр: Балхүүгийн Батбаясгалан
Төрсөн он: 1977
Мэргэжил: Математикч, Математикийн багш
Төгссөн сургууль: Эрдэнэт хотын 4-р 10 жил 1993 он, дунд боловсрол, МУИС-ийн дэргэдэх ТТСС, 1995 он, бүрэн дунд боловсрол, МУИС, 1999 он, баклавар; 2003 он, магистр.

Ажлын туршлага:

2003–2011: МУИС-МКС, алгебрийн тэнхимд багш
2017–одоо: Интеграл-Онлайн сургалтын төвд багш, бодлогын сан хөгжүүлэгч
2019–одоо: МУИС-ийн ХШУИС-ийн хэрэглээний математикийн тэнхимд багш
2019–одоо: ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал
Бусад ажлын туршлага: Монголын математикийн олимпиадыг зохион байгуулах хороонд 1995 оноос тасралтгүй ажиллаж байна. Энэ хугацаанд хот болон улсын олимпиадын ахлах ангийн төрөлд олон арван бодлого дэвшүүлж бодуулж байв. Мөн 2004-2010 хооронд олон улсын математикийн олимпиадад оролцох баг сурагчдад бэлтгэл хичээл орж байв. Улмаар 2010 онд Казакстан улсад болсон ОУМО-52-д багийн дэд ахлагчаар томилогдон оролцсон. 2017 онд ЭЕШ-ийн сэдэвт шинжээчээр, 2018 онд STEM боловсролын хөтөлбөрийн сургагч багшаар тус, тус ажилласан. Японы засгийн газрын монбушо шалгалт болон дээд математикийн чиглэлээр хэд хэдэн номд зохиогч, хамтарсан зохиогчоор оролцож байв.

Амжилт:

1994,1995: ММО-30-ийн 9-р ангийн ангилалд мөнгөн медаль; ММО-31-ийн 10-р ангийн улсын аварга болж улмаар олон улсын математикийн 35, 36-р олимпиадуудад шалгарч оролцож байв.

Бусад:

1999-2003, 2011-2015 Унгар улсын ELTE, Япон улсын KEIO их сургуулиудад докторантурт суралцаж дискрет математик, комбинаторикийн чиглэлээр судалгаа хийж байв.

Манай сургалтын дэлгэрэнгүй танилцуулыг www.integral.mn/about хуудаснаас үзнэ үү.

Хаяг: Түшээ дээд сургуулийн байр 306 тоот
(Хүүхдийн урлан бүтээх төвийн замын эсрэг талд)
Холбогдох утас: 95320036, 96660036.