ММО-52

1. Натурал k тоо ба $a_1 = 2 + 2016$, $a_2 = 2^2 + 2016$, $a_3 = 2^{2^2} + 2016$, $\ldots$, $a_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n} + 2016$ гэсэн дараалал өгөгдөв. Энэ дараалалд k-д хуваагддаг гишүүн ядаж 2 олддог бол төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

2. Тойргоор тоглосон тэмцээнд 52 сурагч оролцжээ. Хэдэн тоглолтын дараа аль ч сурагчийг сонгон авахад түүнтэй тоглосон сурагчдын тоглолтын тоо ялгаатай байсан бол хамгийн олондоо хэдэн тоглолт явагдсан байсан бэ?

3. ABC гурвалжны BC тал дээр P ба Q цэгүүдийг $\measuredangle BAP = \measuredangle ACB$ ба $\measuredangle CAQ = \measuredangle ABC$ байхаар сонгон авчээ. AP шулуун дээр N цэгийг $AP = PN$ байхаар, AQ шулуун дээр M цэгийг $AQ = QM$ байхаар авав. BN ба CM шулуунууд L цэгт огтлолцдог бөгөөд BC талын дундаж цэг нь K бол $\measuredangle BAK = \measuredangle CAL$ гэж батал.

4. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд $a + b + c = 3$ бол

$$\frac{a+b}{2ab+1} + \frac{b+c}{2bc+1} + \frac{c+a}{2ca+1} \geq 2$$

гэж батал.

5. p, q, r нь ялгаатай сондгой анхны тоонууд болог. Натурал n тооны хувьд n, pqr тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $f(n)$, өөрөөр хэлбэл $f(n) = (n, pqr)$ гэж тэмдэглэе. $1 \leq a, b, c \leq pqr$ бөгөөд

$$f(a), f(b), f(c), f(a+b), f(b+c), f(c+a), f(a+b+c)$$

утгууд нь бүгд ялгаатай байдаг (a, b, c) гурвалын тоог ол.

6. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн дотор M цэгийг $\measuredangle BMC = \measuredangle AMD$ байхаар авав. AB, CD талууд дээр гадаад байдлаар ABE, CDF гурвалжнуудыг

$$\measuredangle BAE = \measuredangle DAM, \measuredangle ABE = \measuredangle CBM, \measuredangle CDF = \measuredangle ADM, \measuredangle DCF = \measuredangle BCM$$

байхаар авав. Тэгвэл M, E, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.