

Тусгаар тогтнолын олимпиад

1. $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ олон гишүүнтийн хувьд:

(a) Уг олон гишүүнт n ширхэг бүхэл язгууртай

(b) $|a_{n-1}| < a_n = 2022$

(c) a_{n-1} нь бүтэн куб

Тэгвэл a_{n-1} ямар утгууд авах боломжтой вэ?

2. 2022 элементтэй олонлогийн 3 элементтэй олонлогуудын заримаас нь тогтох $\mathcal{F}$ бүл байв. Энэ бүлийн аль ч гурвынх нь ядаж хоёр нь хоосон биш огтлолцолтой бол $|\mathcal{F}| \leq 2020 \cdot 2021$ гэж батал.

3. $\triangle ABC$ -ийн BC тал дээр E, F цэгүүдийг B, E, F, C дарааллаар авав. $\angle ABC, \angle ACB, \angle AEB, \angle AFC, \angle AEF, \angle AFE$ -ийн биссектрисүүдийг харгалзан $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$ гэж тэмдэглэе. $\ell_3 \cap \ell_6 = D, \ell_4 \cap \ell_5 = G, \ell_1 \cap GD = N, \ell_2 \cap GD = M, \ell_1 \cap \ell_4 = L, \ell_1 \cap \ell_5 = Q, \ell_2 \cap \ell_3 = K, \ell_2 \cap \ell_6 = P, AK \cap FD = R, CM \cap BN = I, AL \cap EG = T$ болог. NT, MR, AI шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

4. $(n, 30) = 1, n \in \mathbb{N}$ байг. $a \in \mathbb{Z}$ тооны хувьд $n \mid x^2 - a$ байх x бүхэл тоо олддог бол a -г квадрат суутгал гээ. Тэгвэл $1, 2, \dots, n-1$ тоонуудаас дэс дараалсан хоёр квадрат суутгал олдохыг батал.