

IMO-48

1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бодит тоон дараалал өгөгдөв. i ($1 \leq i \leq n$) тоо бүрийн хувьд

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

ба

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$$

гэж тодорхойлъя.

1. Аливаа $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ бодит тоонуудын хувьд

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (1)$$

болохыг батал.

2. (1) тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрдэг байх $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ дараалал оршин байхыг харуул.

2. A, B, C, D, E таван цэгийн хувьд $ABCD$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм, $BCED$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтдаг байв. A цэгийг дайрсан ℓ шулуун DC, BC хэрчмүүдийг харгалзан F, G цэгт огтолдог гээ. $EF = EG = EC$ гэж үзье. Тэгвэл ℓ шулуун DAB өнцгийн биссектрис болохыг батал.

3. Математикийн олимпиадад оролцогсодын зарим нь өөр хоорондоо найзууд байв. Найзууд харилцан бие биенээ танина. Аль ч хоёр нь найз байдаг хэсэг оролцогсодыг нөхөрлөл, нөхөрлөлийн гишүүдийн тоог түүний хэмжээ гээ.

Хамгийн олон гишүүнтэй нөхөрлөлийн хэмжээ тэгш гэдэг нь мэдэгдэж байв. Тэгвэл оролцогсодыг 2 өрөөнд, өрөө тус бүрийн хамгийн олон гишүүнтэй нөхөрлөлийн хэмжээ нь тэнцүү байхаар байрлуулж болохыг батал.

4. ABC гурвалжны C өнцгийн биссектрис багтаасан тойрог ба BC, CA талуудын дундаж перпендикуляруудыг харгалзан R, P, Q цэгүүдэд огтолдог. BC, CA талуудын дундажууд нь харгалзан S, T байг. RQT, RPS гурвалжнуудын талбай тэнцүү болохыг батал.

5. a ба b натурал тоонууд. $(4a^2 - 1)^2$ тоо $4ab - 1$ -д хуваагддаг бол $a = b$ болохыг батал.

6. $n > 1$ нь бүхэл тоо байг. Огторгуйн

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

дэд олонлогийг авч үзье. Нэгдэл нь S олонлогийн бүх $(n + 1)^3 - 1$ цэгийг агуулдаг аль нь ч координатын эхийг дайрдаггүй хамгийн цөөн хавтгайн тоог ол.