IMO-56

1. Хавтгайн төгсгөлөг тооны цэгүүдээс тогтох $\mathcal{S}$ олонлогийн ялгаатай дурын A ба B цэгүүдийн хувьд $AC = BC$ байх $C \in \mathcal{S}$ цэг олдож байвал $\mathcal{S}$-ийг *тэнцвэрт* олонлог гэж нэрлэе. $\mathcal{S}$ олонлогийн ялгаатай дурын A, B ба C цэгүүдийн хувьд $PA = PB = PC$ байх $P \in \mathcal{S}$ цэг олдохгүй бол $\mathcal{S}$-ийг төвгүй олонлог гэе.

1. Бүхэл тоо $n \geq 3$ бүрийн хувьд n ширхэг цэгтэй *тэнцвэрт* олонлог олдохыг үзүүл.
2. n ширхэг цэгтэй *тэнцвэрт, төвгүй* олонлог оршин байх бүх бүхэл $n \geq 3$-ийг ол.

2. $ab - c$, $bc - a$, $ca - b$ тоонууд бүгд 2-ын зэрэгт байх бүх эерэг тоон (a, b, c) гурвалыг ол (Ямар нэг сөрөг биш n-ийн хувьд 2^n хэлбэртэй бичигдэх тоог 2-ын зэрэг гэнэ).

3. $AB > AC$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжин өгөв. Γ нь түүнийг багтаасан тойрог, H нь орто төв, F нь A оройгоос татсан өндрийн суурь болог. BC талын дундаж цэгийг M гэе. Q нь Γ дээрх $\angle HQA = 90°$ байх цэг, K нь Γ дээрх $\angle HKQ = 90°$ байх цэг. Энд A, B, C, K ба Q цэгүүд давхардахгүй бөгөөд Γ тойрог дээр энэ дарааллын дагуу байрласан гэж үзнэ. KQH ба FKM гурвалжныг багтаасан тойргууд шүргэлцэнэ гэж батал.

4. ABC гурвалжин нь O төвтэй Ω тойрогт багтдаг. A цэгт төвтэй Γ тойрог BC хэрчмийг D ба E цэгүүдээр огтолдог бөгөөд B, D, E ба C цэгүүд BC шулуун дээр энэ дарааллын дагуу бүгд ялгаатай байрладаг. Γ ба Ω тойргууд F ба G цэгүүдээр огтлолцдог бөгөөд Ω тойрог дээр A, F, B, C ба G гэсэн дарааллын дагуу байрладаг. BDF гурвалжныг багтаасан тойрог AB хэрчимтэй огтлолцох 2 дахь цэгийг K гэе. CGE гурвалжныг багтаасан тойрог CA хэрчимтэй огтлолцох 2 дахь цэгийг L гэе. FK ба GL шулуунууд ялгаатай бөгөөд X цэгт огтлолцдог байг. AO шулуун X цэгийг дайрна гэж батал.

5. Дурын бодит x, y тоонуудын хувьд

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

байх бүх $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг ол. Энд $\mathbb{R}$-ээр бодит тоон олонлогийг тэмдэглэв.

6. Бүхэл тоон $a_1, a_2, \ldots$ дараалал дараах нөхцөлүүдийг биелүүлдэг. Үүнд:

1. Бүхэл тоо $j \geq 1$ бүрийн хувьд $1 \leq a_j \leq 2015$;
2. Бүхэл тоонууд $1 \leq k < \ell$ бүрийн хувьд $k + a_k \neq \ell + a_\ell$.

$n > m \geq N$ байх дурын бүхэл m, n тоонуудын хувьд

$$\Big| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \Big| \leq 1007^2$$

биелэх эерэг бүхэл b ба N тоонууд олдохыг батал.