

IMO-59

1. Г тойрогт багтсан хурц өнцөгт ABC гурвалжны AB ба AC талууд дээр D ба E цэгүүдийг $AD = AE$ байхаар авав. BD ба CE хэрчмүүдийн дундаж цэгт татсан перпендикулярууд Г тойргийн AB ба AC богино нумуудыг харгалзан F ба G цэгүүдэд огтолдог. DE ба FG шулуунууд параллель гэдгийг батал.

2. $a_{n+1} = a_1$ ба $a_{n+2} = a_2$ байх бөгөөд $i = 1, 2, \dots, n$ утгуудад

$$a_i \cdot a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

биелэх бодит $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ тоонууд оршин байдаг бүх бүхэл $n \geq 3$ тоог ол.

3. Хамгийн доод талын мөрөөс бусад мөрөнд бичигдсэн тоо бүр түүний доор бичигдсэн 2 тооны ялгаврын модультай тэнцүү байхаар зөв гурвалжин хэлбэртэй бичигдсэн тоонуудын бүрдлийг Паскалийн хасах гурвалжин гээ. Жишээлбэл, 1-ээс 10 хүртэлх тоонуудаас бүрдэх 4 мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин:

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & 6 & \\ 5 & 7 & 1 & \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Тэгвэл 1-ээс $1 + 2 + \dots + 2018$ хүртэлх тоонуудаас бүрдэх 2018 мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин оршин байх уу?

4. x ба y нь 20-оос хэтрэхгүй эерэг бүхэл тоо байх хавтгайн (x, y) цэг бүрийг толбо гээ. Анх эдгээр 400 толбоны аль ч толбон дээр чулуу байгаагүй. Бат, Цэцэг хоёр ээлжлэн өөрийн чулууг толбон дээр байрлуулах бөгөөд Цэцэг эхэлнэ. Цэцэг улаан чулуутай аль ч 2 толбоны хоорондох зай $\sqrt{5}$ -тай тэнцэхгүй байхаар чулуугүй толбон дээр улаан чулуу байрлуулна. Бат өөрийн ээлжид чулуугүй толбон дээр хөх чулуу байрлуулна (хөх чулуутай толбо чулуутай өөр бусад толбоноос ямар ч зайд байж болно). Хэн нэг нь үйлдэл хийх боломжгүй болсон үед тэд зогсоно. Бат хөх чулуунуудаа хаана байрлуулснаас үл хамааран Цэцэг дор хаяад K ширхэг улаан чулууг байрлуулж чаддаг байх хамгийн их K тоог ол.

5. Эерэг бүхэл тоон $a_1, a_2, \dots$ төгсгөлгүй дараалал өгөгдөв. Хэрэв $n \geq N$ бүрийн хувьд

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

нийлбэр бүхэл байх $N > 1$ дугаар олддог бол $m \geq M$ бүрийн хувьд $a_m = a_{m+1}$ биелэх M дугаар олдоно гэж батал.

6. $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ адилтгал биелэх $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт дотор $\angle XAB = \angle XCD$ ба $\angle XBC = \angle XDA$ байх X цэг авав. $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ болохыг үзүүл.